



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA

KLECIO EMANUEL LIMA DE FARIAS

Descrição de Hořava-Lifshitz para modelos que violam a invariância de Lorentz
via operadores de altas ordens derivativas

Campina Grande, PB

4 de outubro de 2017

KLECIO EMANUEL LIMA DE FARIAS

DESCRIÇÃO DE HOŘAVA-LIFSHITZ PARA MODELOS QUE VIOLAM A INVARIÂNCIA DE
LORENTZ VIA OPERADORES DE ALTAS ORDENS DERIVATIVAS

Trabalho de Conclusão do Curso Mestrado em
Física pela Universidade Federal de Campina
Grande. Em cumprimento às exigências para
obtenção do Título de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. EDUARDO MARCOS RODRIGUES DOS PASSOS

Campina Grande, PB
4 de outubro de 2017

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL DA UFCG

F224d

Farias, Klecio Emanuel Lima de.

Descrição de Ho ava-Lifshitz para modelos que violam a invariância de Lorentz via operadores de altas ordens derivativas / Klecio Emanuel Lima de Farias. - Campina Grande, 2018.

49 f. il. color.

Dissertação (Mestrado em Física) - Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2017.

"Orientação: Prof., Dr. Eduardo Marcos Rodrigues dos Passos".

Referências.

1. Ho ava-Lifshitz. 2. Violação da Simetria de Lorentz. 3. Explosão de raios Gama. I. Passos, Eduardo Marcos Rodrigues dos. II. Título.

CDU 537.8(043)

KLECIO EMANUEL LIMA DE FARIAS

ESCALONAMENTOS DE HOŘAVA-LIFSHITZ E MODELOS QUE VIOLAM A INVARIÂNCIA DE
LORENTZ VIA OPERADORES DE ALTAS ORDENS DERIVATIVAS

Trabalho de Conclusão do Curso Mestrado em
Física pela Universidade Federal de Campina
Grande. Em cumprimento às exigências para
obtenção do Título de Mestre em Física.

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Dr. Eduardo Passos
Unidade Acadêmica de Física - UAF/UFCG
Orientador

Prof. Dr. Bertúlio de Lima Bernardo
Unidade Acadêmica de Física - UAF/UFCG
Examinador interno

Prof. Dr. Jean Paulo Spinnely da Silva
Departamento de Física - DF/UEPB
Examinador Externo

Campina Grande, 4 de outubro de 2017

*Dedico este trabalho ao meu Pai que infelizmente,
não se encontra mais entre nós, mas que foi o maior
exemplo de vida que alguém pode ter.*

Agradecimentos

Eu gostaria de começar agradecendo aos meus pais por todo apoio e suporte para ter conseguido trilhar este longo caminho até aqui, e me guiando de forma a nunca desviar de meus objetivos. Agradeço também a Eduardo Passos por ter aceitado a difícil missão de me orientar muito bem e com muita paciência, e a todos que me ajudaram no início deste curso, ao qual me encontrei com bastante dificuldades devido a um acidente de moto me deixando temporariamente (4 meses) com dificuldades de locomoção e me fazendo perceber a dificuldade que pessoas com essa deficiência permanente passam diariamente. Entre todos os que apoiaram gostaria de citar o nome do moto clube Cães de Guerra que no todo me auxiliaram. Aline Silva que a todo momento esteve presente na minha recuperação e aguenta minhas reclamações sempre, Aline Lins sempre resolvendo meus problemas burocráticos na universidade, Catharine Quintans essa não sei nem por onde começar a agradecer por tanta coisa feita por mim, e não podendo esquecer de Ingrid e Victor Hugo amigos para toda hora. A todos os professores do departamento de Física, a Douglas Vitoretti pelas cervejas e boas conversas das sextas-feiras no posto. Aos companheiros de estudo Edyvania e Caio, que me ajudaram bastante nas horas de apertos em fim de períodos.

Um agradecimento especial a Robson e a Rodrigo, irmãos ao qual a muito tempo vem me apoiando e sempre incentivando a seguir em frente. A minha namorada Kalina Ferreira que suportou toda minha falta de tempo e de paciência nessa reta final.

Ich danke auch an alle Leute, die bei mir in Deutschland war, in speziell, Gabriella Furlani, Ola Alessandra, Arne Sander und Costa Marsupilami, die mir sehr am anfang mit vieler Geduld geholfen haben.

Por último agradecer a Capes (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) pelo suporte financeiro dado.

Resumo

Neste trabalho, aplicamos o reescalonamento tipo ao de Hořava-Lifshitz para reescrever algumas teorias eletrodinâmicas de altas ordens derivativas que violam a simetria de Lorentz, controladas por quadri-vetores: $(n_\mu)_s$ que determinam direções preferenciais no espaço - tempo. As equações de movimento foram obtidas, através das quais analisamos as relações de dispersão modificadas em conjunto com os resultados observacionais das experiências de explosão de raios gama (GRB). Os limites do expoente crítico foram discutidos a partir dos dados dos GRBs através de cálculos de grau de polarização (usando operador de dimensão-cinco) e de atraso temporal (usando operador de dimensão-seis) nas propagações dos fótons. As implicações físicas foram comparadas com recentes resultados da literatura sobre limites da quebra da invariância de Lorentz via GRBs.

Palavras-chave: Hořava-Lifshitz, violação da simetria de Lorentz, explosão de raios gama

Abstract

In this work, we used a Hořava-Lifshitz scaling to rewrite a high-order derivative electrodynamics that violates the Lorentz symmetry, controlled by 4-vector $(n_\mu)_s$ which determine the space-time preferential directions. The equations of motion were obtained, through which the modified dispersion relation was analyzed together with observational results of gamma ray bursts (GRB). The limits of the critical exponent were discussed from the GRBs values through calculation of degree of polarization (using five-dimensional operator) and temporal delay (using six-dimensional operator) on photon propagation. The physical implications were compared with the current results from the literature regarding Lorentz invariance violation via GRB.

Keywords: Hořava-Lifshitz, Lorentz invariance violation , gamma-ray burst .

Sumário

Introdução	1
1 Extensão da eletrodinâmica com operadores de altas ordens derivativas	4
1.1 Eletrodinâmica com Operadores de Dimensão-cinco	4
1.1.1 Modelo isotrópico	6
1.2 Eletrodinâmica com Operadores de Dimensão-seis	8
1.2.1 Modelo isotrópico	10
2 Eletrodinâmica em altas ordens derivativas devido ao escalonamento de Hořava-Lifshitz	13
2.1 Eletrodinâmica sob a ação do expoente crítico	13
2.1.1 Modificação tipo Hořava-Lifshitz no setor do campo magnético	14
2.1.2 Modificação tipo Hořava-Lifshitz no setor do campo elétrico	15
2.2 Eletrodinâmica com o operador de dimensão-5 sob a ação do expoente crítico de Lifshitz . . .	16
2.2.1 Invariância de calibre	17
2.2.2 Relação de dispersão	18
2.3 Eletrodinâmica com o operador de dimensão-seis sob a ação do expoente crítico de Lifshitz .	19
2.3.1 Invariância de Calibre	20
2.3.2 Relação de dispersão	20
2.3.3 Velocidade de Grupo	22
3 Fenomenologia	23
3.1 Explosões de Raios Gama	23
3.2 A Birefringência entre a Propagação de Fótons	24
3.2.1 Polarização da Luz	24
3.3 O Atraso Temporal na Propagação entre Fótons	26
3.3.1 Atraso temporal	27

A	Equação de Euler-Lagrange de altas Ordens Derivativas	33
B	Modelo de Maxwell-Hořava-Lifshitz	36
B.1	Construção do modelo	36
B.2	Equações de Movimento	37
B.3	O propagador do campo de calibre	39
B.4	Modos de Propagação de Ondas	41
C	Segundo Modelo de Maxwell-Hořava-Lifshitz	43
C.1	Construção do modelo	43
C.2	Equações de Movimento para o segundo Tipo de Reescalamento	45
C.3	Invariância de Calibre para o Modelo 2	46
	Bibliografia	46

Introdução

A invariância de Lorentz (IL), caracterizada pela constância por transformações de rotações e boosts, é um ingrediente fundamental do modelo padrão (MP) o qual descreve de forma precisa, as propriedades das partículas fundamentais e as interações em escalas de energia abaixo de TeV (escala de energia alcançada pelo experimento do grande colisor de hádrons (LHC)). Contudo, a ideia de que IL possa ser violada em altas energias, presumidamente na escala de energia de Planck, $M_P \sim 1.22 \times 10^{19} \text{GeV}/c^2$, tem sido uma possibilidade considerada em diversas áreas da física teórica (veja por exemplo, Ref. [1] e referências afins). Neste trabalho em particular, a violação da invariância de Lorentz (VIL) é introduzida através de operadores de altas ordens derivativas os quais quebram explicitamente a IL. Esses modelos de VIL funcionam como teorias efetivas no regime da escala do ultravioleta (UV), e assim, conduzindo a modificações da relação de dispersão para as partículas em altas energias [2] (observar também a Ref. [3]).

O estudo de termos de altas ordens derivativas no cenário da VIL com teoria efetiva foi inicialmente proposto por Myers e Pospelov pelo uso de operadores de altas ordens derivativas ao longo de um 4-vetor, n_μ , não-dinâmico que interagem com campos escalares, fermiônicos e de calibre [2]. Para o setor do campo eletromagnético, temos por exemplo, primeiro a introdução de LIV com operadores de dimensão-cinco e de CPT-ímpar (inverte a paridade quando aplicada):

$$S_{(5)} = -\frac{\xi}{M_P} \int d^4x n^\alpha F_{\alpha\delta} n^\gamma \partial_\gamma n_\beta \tilde{F}^{\beta\delta}. \quad (1)$$

E também, uma construção auxiliar com operadores de dimensão-seis e de CPT-par (conserva a paridade quando aplicada):

$$S_{(6)} = -\frac{\beta^{(6)}}{2M_P^2} \int d^4x F^{\mu\nu} n_\mu n^\gamma (n \cdot \partial)^2 F_{\gamma\nu}. \quad (2)$$

onde ξ e $\beta^{(6)}$ são parâmetros adimensionais; $\alpha, \beta, \mu, \nu, \dots = 0, 1, 2, 3$; $F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$; e $\tilde{F}^{\beta\delta} = \frac{1}{2} \epsilon^{\beta\delta\rho\omega} F_{\rho\omega}$. Escolhendo um simples cenário pelo qual só temos efeitos da LIV sobre os boosts, isto implica que o 4-vetor n_μ (que se refere a campo de fundo do modelo) pode se restringir a $(n_\mu \equiv 1, \vec{0})$, o que nos leva a uma fraca anisotropia no espaço-tempo (conhecidos como modelos isotrópicos, veja melhor em Refs.[4, 5]). A anisotropia é a característica que um meio possui, em que certa propriedade física varia com

a direção. Então, integrando por partes a Eq.(1) e usando a identidade de Bianchi $\partial_{[\alpha}F_{\beta\gamma]} = 0$, obtemos

$$S_{(5)} = \frac{\xi}{2M_{\text{P}}} \int d^4x \epsilon^{ijk} A_i (i\partial_t)^2 F_{jk}, \quad \epsilon^{ijk} = \epsilon^{0ijk} \quad (3a)$$

$$S_{(6)} = \frac{\beta^{(6)}}{2M_{\text{P}}^2} \int d^4x F^{0i} (i\partial_t)^2 F_{0i} \quad (3b)$$

onde os índices latinos indicam as componentes espaciais, $= i, j, k = 1, 2, 3$, e F_{0i} , F_{ij} são as componentes do tensor intensidade de do campo eletromagnético.

Com respeito as dimensões dos operadores citados, elas são definidas com relação as dimensões de suas derivadas e campos presentes em relação a adimensionalidade da ação clássica. Podemos tomar como exemplo o operador de Maxwell $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$, que possui dimensão 4, pois possuirá duas derivadas e dois campos ambos com dimensão de massa em $(3 + 1)$ dimensões do espaço-tempo. O mesmo acontece com os operadores de dimensões cinco e seis, que possuem esse mesmo termo, com o acréscimo de uma e duas derivadas respectivamente. O acréscimo na ordem do operador deve ser ajustado com a inclusão da massa de Planck M_{P} , nos retornando uma estrutura dimensional correta.

Como pode ser visto nas Eqs.(3a)–(3b), a invariância de Lorentz é quebrada em torno da escala M_{P} (escala de energia que supostamente a quebra da invariância de Lorentz esteja presente) que pode apresentar problemas teóricos como também desafios observacionais para tais modelos. Essa teoria pode apresentar problemas associados com a não renormalização típicos de teorias de altas ordens derivativas. E para lidar com esses problemas, podemos lançar mão de um escala de energia intermediária que ainda possa manter a anisotropia entre o espaço- tempo, tal como a teoria de campos de Hořava-Lifshitz [6, 7] que consegue renormalizar teorias que antes eram não-renormalizáveis. Nessa abordagem, há uma assimetria explícita entre a coordenada temporal e as espaciais pela qual a IL é quebrada. Essa assimetria é controlada pelo expoente crítico z , no qual é também chamado de expoente crítico de Lifshitz.

O objetivo da dissertação é estudar os efeitos do escalonamento de Hořava-Lifshitz sobre os termos dado pelas Eqs.(3a)–(3b) de modo a construir teorias de campos resultante nas quais as suas respectivas escalas de energias seja parametrizadas para uma escala intermediária regida pelo expoente crítico z . Nosso foco principal é investigar os possíveis efeitos fenomenologicamente que poderão emergir de uma escala de energia próxima da escala intermediária, $\Lambda_{\text{HL}} \sim 10^{10}\text{GeV}$, dado pelo processo de separação entre a comportamento UV-Lifshitz e os efeitos escalas de altíssimas energias (uma discussão na escolha da escala de energia para Λ_{HL} , é encontrada por exemplo, na Ref. [8]).

Tomaremos vantagens desse processo para encontrar novos limites sobre os efeitos da VIL (no comportamento UV-Lifshitz) pelo uso de medidas recentes do grau de polarização e atraso temporal ligados a propagação de ondas eletromagnéticas devido a eventos de explosão de raios gama (GRBs). Note que estudos anteriores (em escalas de altas energias) adotam certas correções para relação de dispersão e atraso

temporal entre os fótons como um método de se obter limites sobre a VIL através medições do grau de polarização de GRBs [9, 10, 11] (veja a discussão específica nas Refs. [12, 13, 14]). Tais trabalhos direcionarão os nossos estudos.

Esta dissertação é organizada como segue. No Cap. 1, estudaremos os efeitos da VIL sobre a eletrodinâmica quando são adicionados de forma separada os operadores de dimensão-cinco e de dimensão-seis na Lagrangiana de Maxwell. Estudaremos as modificações nas equações de movimento e na relação de dispersão. No Cap. 2, aplicamos o processo de escalonamento de Hořava-Lifshitz primeiro para eletrodinâmica de Maxwell e em seguida na presença dos respectivos operadores de dimensão-cinco e dimensão-seis, este último desenvolvido por nós, ambos no regime da VIL isotrópica. Para ambos os casos, analisamos a consistência da invariância de calibre e as modificações na relação de dispersão. No Cap. 3, estudamos os limites fenomenológicos para os efeitos da VIL, primeiro para o caso de operadores de dimensão-cinco (usando dados de grau de polarização) e depois para o caso de operadores de dimensão-seis (usando dados de atraso temporal na propagação de fótons). A fonte de emissão de radiação eletromagnética é devido a uma específica explosão de radiação gama (GRB). No último capítulo, nossas conclusões e as perspectivas.

Capítulo 1

Extensão da eletrodinâmica com operadores de altas ordens derivativas

Em resumo, Myers-Pospelov [15] introduzem operadores de altas ordens derivativas, não renormalizáveis¹ e quadráticos nos campos que poderão ser adicionados a Lagrangeana da eletrodinâmica quântica (QED) preservando a invariância de calibre, porém violando efetivamente a IL (um exemplo, foi o termo introduzido pela Eq. (1)). Neste capítulo, estudaremos inicialmente alguns efeitos produzidos pelo termo efetivo, dado pela Eq. (1), sobre a eletrodinâmica clássica. Um estudo análogo será realizado para o caso em que levamos em conta os efeitos produzidos pela extensão efetiva de dimensão-seis, dada pela Eq.(2). Para ambos os casos, estudamos as possíveis implicações sobre as equações de movimento e as relações de dispersão associadas.

1.1 Eletrodinâmica com Operadores de Dimensão-cinco

Considerando o termo dado pela Eq. (1), temos que a Lagrangeana da eletrodinâmica modificada é dada na forma

$$\mathcal{L}_{\text{impar}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{\xi}{2M_{\text{P}}}n^\alpha F_{\alpha\delta}(n \cdot \partial) \left(n_\beta \epsilon^{\beta\delta\tau\lambda} F_{\tau\lambda} \right), \quad (1.1)$$

que corresponde a um tipo de teoria eletromagnética sobre os efeitos da LIV e mediada por campos constantes, n_μ , acoplados a derivadas. O termo $(n \cdot \partial)$ sempre será usado quando houver o $(n^\lambda \partial_\lambda)$ por simplificação de notação. Note também que os parâmetros ξ_γ e M_{P} já foram mencionados anteriormente na introdução. Observamos também que a Lagrangiana, Eq.(1.1), é invariante pela transformação de calibre $U(1)$: $A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \varphi$.

¹esses operadores são chamados assim devido sua dimensionalidade ser maior que quatro, logo sendo o menor deles de dimensão-cinco.

Considerando agora as equações de Euler-Lagrange adaptadas para altas ordens derivativas [16]:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\alpha} = \partial_\sigma \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\sigma A_\alpha)} - \partial_\rho \partial_\sigma \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\rho \partial_\sigma A_\alpha)}, \quad (1.2)$$

tal que para a Lagrangeana, Eq.(1.1), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\alpha} &= 0, \\ \partial_\sigma \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\sigma A_\alpha)} &= -\partial_\sigma F^{\sigma\alpha} + \frac{\xi}{2M_{\text{P}}} \partial_\sigma \left[n^\sigma n^\rho \partial_\rho n_\beta \epsilon^{\beta\delta\phi\lambda} F_{\phi\lambda} - n^\alpha n^\rho \partial_\rho n_\beta \epsilon^{\beta\sigma\phi\lambda} F_{\phi\lambda} \right], \\ \partial_\rho \partial_\sigma \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\rho \partial_\sigma A_\alpha)} &= -\frac{\xi}{2M_{\text{P}}} \partial_\rho \partial_\sigma \left[2n^\lambda F_{\lambda\delta} n^\rho n_\beta \epsilon^{\beta\sigma\delta\alpha} \right], \end{aligned} \quad (1.3)$$

em que resulta na seguinte expressão:

$$\partial_\sigma F^{\sigma\alpha} - \frac{\xi}{M_{\text{P}}} (n \cdot \partial)^2 n_\beta \epsilon^{\beta\alpha\phi\lambda} F_{\phi\lambda} = 0 \quad (1.4)$$

e pelo uso da identidade de Bianchi $\partial_\alpha F_{\gamma\delta} + \partial_\delta F_{\alpha\gamma} + \partial_\gamma F_{\delta\alpha} = 0$. Isto nos leva a

$$\partial_\sigma \epsilon^{\sigma\rho\alpha\beta} F_{\alpha\beta} = 0. \quad (1.5)$$

onde nos levam as equações de movimento da teoria. Note que, a Eq. (1.5) é livre dos efeitos da LIV.

Se tomarmos agora para a Eq. (1.4) os valores para $\alpha = i$ e $\alpha = 0$ respectivamente, podemos chegar à um conjunto de equações do quais são respectivamente:

$$\partial_0 F^{0i} + \partial_j F^{ji} - \frac{\xi}{M_{\text{P}}} (n \cdot \partial)^2 (n_k 2\epsilon^{ki0j} F_{0j} + n_\beta \epsilon^{\beta ikj} F_{jk}) = 0, \quad (1.6a)$$

$$\partial_j F^{0j} + \frac{\xi}{M_{\text{P}}} (n \cdot \partial)^2 (n_l \epsilon^{l0kj} F_{ij}) = 0, \quad (1.6b)$$

e para a Eq. (1.5) obtemos

$$\partial_0 (\epsilon^{0ijk} F_{jk}) + 2\partial_j (\epsilon^{j0ik} F_{0k}) = 0, \quad (1.7a)$$

$$\partial_i (\epsilon^{j0ik} F_{0k}) = 0. \quad (1.7b)$$

Lembrando que cada componente usada acima são associadas a componentes do tensor eletromagnético $F^{\mu\nu}$ expresso por [17]:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

A descrição vetorial das Eqs. (1.6a)–(1.7b) é da forma (para $n_\mu = (n_0, \vec{n})$):

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{2\xi}{M_{\text{P}}} \left(n_0 \frac{\partial}{\partial t} - \vec{n} \cdot \vec{\nabla} \right)^2 (\vec{n} \times \vec{E} + n_0 \vec{B}) = 0, \quad (1.9a)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} + \frac{2\xi}{M_{\text{P}}} \left(n_0 \frac{\partial}{\partial t} - \vec{n} \cdot \vec{\nabla} \right)^2 \vec{n} \cdot \vec{B} = 0, \quad (1.9b)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0, \quad (1.9c)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0. \quad (1.9d)$$

Note que os efeitos da VIL só atingem as equações de maxwell que admitem fontes externas (Lei de Gauss e Lei de Ampère-Maxwell). Por outro lado, o grupo de equações homogêneas permanece inalterado, como o previsto.

No sentido de reescrever as Eqs.(1.9a)–(1.9d) no espaço dos momentos, escrevemos as soluções dos campos elétrico e magnético como:

$$\begin{aligned} \vec{E}(x) &= E(k) \exp(-ik \cdot x), \\ \vec{B}(x) &= B(k) \exp(-ik \cdot x) \end{aligned} \quad (1.10)$$

tal que

$$\vec{k} \times \vec{B} = -\omega \vec{E} - i \frac{2\xi}{M_{\text{P}}} (n_0 \omega + \vec{n} \cdot \vec{k})^2 (\vec{n} \times \vec{E} + n_0 \vec{B}), \quad (1.11a)$$

$$\vec{k} \cdot \vec{E} = -i \frac{2\xi}{M_{\text{P}}} (n_0 \omega + \vec{n} \cdot \vec{k})^2 \vec{n} \cdot \vec{B}, \quad (1.11b)$$

$$\vec{k} \times \vec{E} = \omega \vec{B}, \quad (1.11c)$$

$$\vec{k} \cdot \vec{B} = 0, \quad (1.11d)$$

onde ω e \vec{k} são, respectivamente a frequência e o vetor onda da onda plana.

1.1.1 Modelo isotrópico

Nesta seção vamos encontrar a relação de dispersão para as ondas eletromagnéticas para o caso $n_\mu = (n_0 = 1, \vec{0})$, que representa uma configuração isotrópica. Esta abordagem corresponde a um pequeno subconjunto de operadores que controlam a LIV que preserva a invariância do rotacional. Tal sistema inercial isotrópico deve ser especificado, pois outros sistemas que violam a invariância das transformações de boosts podem também afetar a invariância por rotações. Uma escolha natural para este sistema de referência da radiação cósmica de fundo (CMB), porém outras escolhas são possíveis, como discutido em [18]. Primeiro as Eqs. (1.6a)–(1.7b) se reduzem em:

$$\partial_0 F^{0i} + \partial_j F^{ji} + 2 \frac{\xi}{M_{\text{P}}} \epsilon^{0ijl} (\partial_0)^2 F_{jl} = 0, \quad (1.12)$$

$$\partial_j F^{j0} = 0, \quad (1.13)$$

e

$$\partial_0(\epsilon^{0ijk} F_{jk}) + 2\partial_j(\epsilon^{j0ik} F_{0k}) = 0, \quad (1.14)$$

$$\partial_i(\epsilon^{j0ik} F_{0k}) = 0, \quad (1.15)$$

lembrando que as Eqs. (1.14) e (1.15) são obtidas da Eq. (1.5), e devido a isso não sofrem ação da LIV. Quando derivamos a Eq. (1.12) com relação ao tempo, podemos formar um sistema de equações com a Eq. (1.14) tal que nos resulta em uma nova equação de movimento, sendo ela da forma

$$-(\partial^0)^2 F^{0i} - \partial^j \partial_j F^{0i} - \partial^i F^{0i} + 2\frac{\xi}{M_P} \epsilon^{jil} \partial_j (\partial_0)^2 F_{0l} = 0. \quad (1.16)$$

Neste ponto percebemos que a Eq. (1.16) se encontra apenas em termos do setor elétrico, com isso vamos expressa-la por meio do campo usando a relação $F_{0i} = E_i$, o qual chegamos em:

$$-\partial^0 \partial_0 E^k - \partial^j (\partial_j E^k - \partial^k E_j) - 2\frac{\xi}{M_P} \epsilon^{mkn} \partial_m (\partial_0)^2 E_n = 0. \quad (1.17)$$

Escrevendo agora a Eq. (1.17) para o caso de ondas planas através do Ansatz

$$E_m(x) = E_m(k) e^{-ik^\rho x_\rho}, \quad (1.18)$$

a equação de movimento toma a forma a seguir

$$k_0^2 E^l + k^j (k_j E^l - k^l E_j) - 2i \frac{\xi}{M_P} \epsilon^{mln} (k_0)^2 k_m E_n = 0. \quad (1.19)$$

Como estamos tratando de um caso isotrópico, ou seja, é simétrica sob rotações espaciais, assim não perdendo a generalidade, quando fixamos a direção da propagação da onda plana, podemos então considerar a propagação da onda na direção do eixo \hat{z} , com o vetor de onda $k_\rho = (\omega, 0, 0, p)$. Com isso, conseguimos três equações de movimento dada pela Eq. (1.19) que tomam a seguinte forma

$$\begin{aligned} -\omega^2 E_3 &= 0, \\ -\omega^2 E_2 + p^2 E_2 - 2i \frac{\xi}{M_P} \omega^2 p E_1 &= 0, \\ -\omega^2 E_1 + p^2 E_1 + 2i \frac{\xi}{M_P} \omega^2 p E_2 &= 0. \end{aligned} \quad (1.20)$$

A primeira das Eqs. (1.20), nos diz que a componente longitudinal do campo elétrico ainda esta ausente (sempre para $\xi \neq 0$), e conseqüentemente para uma onda se propagando ao longo do eixo \hat{z} , temos $E_3 = 0$. As outras duas equações restantes podem ser compactadas e reorganizadas da seguinte maneira:

$$(-\omega^2 + p^2)(E_1 \pm iE_2) \pm \frac{2\xi}{M_P} \omega^2 p^2 (E_1 \pm iE_2) = 0. \quad (1.21)$$

Significando que os campos polarizados a esquerda e a direita que são denotados por $\vec{E}_\pm \equiv (E_1 \pm iE_2)$ (mais sobre campos polarizados ver [19]), satisfazem a equação de movimento:

$$\left[(-\omega^2 + p^2) \pm \frac{2\xi}{M_P} \omega^2 p^2 \right] \vec{E}_\pm = 0. \quad (1.22)$$

Então percebemos que o campo elétrico está sujeito a birrefringência que é visto devido ao sinal \pm , possuindo assim duas soluções distintas que são justamente componentes polarizadas a direita e esquerda. Esta mesma propriedades também nos dá relações de dispersões diferentes, como podem ser vistas abaixo:

$$\omega_{\pm} \approx p \left(1 \pm \frac{\xi}{M_P} p \right), \quad (1.23)$$

onde foram feitas aproximações ao considerarmos que $\frac{\xi}{E_p} \ll 1$ para se chegar a esse resultado.

A relação de dispersão é a responsável por descrever a maneira com que a propagação de ondas variadas de acordo com seu comprimento de onda ou sua frequência. Através da Eq. (1.23) é possível se encontrar a expressão que nos leva as velocidades de grupo dessa onda, logo ao derivarmos (1.23) em relação ao momento p chegamos em:

$$v_{g\pm} = \frac{\partial \omega_{\pm}}{\partial p} \approx 1 \pm 2 \frac{\xi}{M_P} p. \quad (1.24)$$

Essas velocidades podem caracterizar mais corretamente as perturbações periódicas nascidas da dispersão de uma onda genuína em um meio dispersivo. Também é frequentemente vista como a velocidade na qual a energia e a informação são transportadas na onda[20].

1.2 Eletrodinâmica com Operadores de Dimensão-seis

Para todos os efeitos, faremos nesta seção, uma análise de uma maneira semelhante ao que foi feito na sec. 1.1, apenas com o diferencial de um operador de dimensão-6 [1] e observar as modificações causadas nas equações de movimento e consequentemente na relação de dispersão que será útil para estudos de atraso temporal de fótons, ao qual não podem ser atribuídos a operadores de dimensão-5 devido ao fenômeno da birrefringência obtida na relação de dispersão como pode ser visto na Eq. (1.23).

Então, da equação de Maxwell para a teoria clássica eletromagnética e somando a Eq. (2), obtemos a Lagrangeana para uma teoria de dimensão-6 que viola a invariância de Lorentz:

$$\mathcal{L}_{par} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{\beta^{(6)}}{2M_P^2} n_{\alpha} F^{\alpha\mu} (n^{\lambda} \partial_{\lambda})^2 (n^{\beta} F_{\beta\mu}). \quad (1.25)$$

Usando a equação de Euler-Lagrange para altas ordens derivativas, que para o caso de dimensão-seis [16], se torna:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\theta}} = \partial_{\sigma} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\sigma} A_{\theta})} - \partial_{\epsilon} \partial_{\sigma} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\epsilon} \partial_{\sigma} A_{\theta})} + \partial_{\gamma} \partial_{\epsilon} \partial_{\sigma} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\gamma} \partial_{\epsilon} \partial_{\sigma} A_{\theta})}, \quad (1.26)$$

e quando aplicada a Eq. (1.25) na Eq. (A.14), se obtém

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\theta} &= 0, \\ \partial_\sigma \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\sigma A_\theta)} &= -\partial_\sigma F^{\sigma\theta} - \frac{\beta^{(6)}}{2M_P^2} \left[(n \cdot \partial)^3 n_\beta F^{\beta\theta} - n^\theta \partial_\sigma (n \cdot \partial)^2 (n_\beta F^{\beta\sigma}) \right], \\ \partial_\gamma \partial_\epsilon \partial_\sigma \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\gamma \partial_\epsilon \partial_\sigma A_\theta)} &= -\frac{\beta^{(6)}}{2M_P^2} \left[(n \cdot \partial)^3 n_\alpha F^{\alpha\theta} - \partial_\sigma n^\theta (n \cdot \partial)^2 n_\alpha F^{\alpha\sigma} \right],\end{aligned}\quad (1.27)$$

resultando assim na equação de movimento para operadores de dimensão-6, dada por:

$$-\partial_\sigma F^{\sigma\theta} - \frac{\beta^{(6)}}{M_P^2} \left[n_\alpha (n \cdot \partial)^3 F^{\alpha\theta} - n^\theta \partial_\sigma (n \cdot \partial)^2 n_\alpha F^{\alpha\sigma} \right] = 0, \quad (1.28)$$

$$\partial_\sigma \epsilon^{\sigma\rho\alpha\beta} F_{\alpha\beta} = 0. \quad (1.29)$$

Como podemos ver, a equação Eq. (1.29) é a mesma que a Eq. (1.5). Em que podemos reescrever as Eqs. (1.28) e (1.29) variando seus índices, como por exemplo, fazendo $\theta \neq 0$ e $\theta = 0$, chegaremos novamente a dois pares de equações:

$$\begin{aligned}-\partial_0 F^{0i} - \partial_j F^{ji} - \frac{\beta^{(6)}}{M_P^2} (n \cdot \partial)^2 \left[(n \cdot \partial) (n_0 F^{0i} + n_k F^{ki}) \right. \\ \left. - n^i \left(\partial_0 n_k F^{k0} + \partial_j n_k F^{kj} + \partial_j n_0 F^{0j} \right) \right] = 0,\end{aligned}\quad (1.30a)$$

$$-\partial_i F^{i0} - \frac{\beta^{(6)}}{M_P^2} (n \cdot \partial)^2 \left[(n \cdot \partial) n_j F^{j0} - n^0 \left(-\partial_0 n_j F^{j0} + \partial_i n_0 F^{0i} - \partial_i n_j F^{ij} \right) \right] = 0, \quad (1.30b)$$

e

$$\partial_0 (\epsilon^{0ijk} F_{jk}) + 2\partial_j (\epsilon^{j0ik} F_{0k}) = 0, \quad (1.31a)$$

$$\partial_i (\epsilon^{j0ik} F_{0k}) = 0. \quad (1.31b)$$

Assim como já era esperado, as equações homogêneas referentes a Lei de Faraday Eq. (1.31a) e a Lei de Gauss para o Magnetismo (1.31b), continuam inalteradas perante a adição do operador de dimensão-seis.

Escrevendo as Eqs. (1.30a)-(1.31b) na notação vetorial temos

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{\nabla} \times \vec{B} + \frac{\beta^{(6)}}{M_P^2} \left[\left(n_0 \frac{\partial}{\partial t} - \vec{n} \cdot \vec{\nabla} \right)^3 (\vec{n} \times \vec{E} + n_0 \vec{B}) - \vec{n} \left(-\frac{\partial}{\partial t} \cdot \vec{n} \left(n_0 \frac{\partial}{\partial t} - \vec{n} \cdot \vec{\nabla} \right)^2 \vec{n} \cdot \vec{E} \right. \right. \\ \left. \left. + \vec{\nabla} \cdot \left(n_0 \frac{\partial}{\partial t} - \vec{n} \cdot \vec{\nabla} \right)^2 (n_0 \vec{E} + \vec{n} \times \vec{B}) \right) \right] = 0,\end{aligned}\quad (1.32a)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} + \frac{\beta^{(6)}}{M_P^2} \left(n_0 \frac{\partial}{\partial t} - \vec{n} \cdot \vec{\nabla} \right)^2 \left[\left(n_0 \frac{\partial}{\partial t} - \vec{n} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{n} \cdot \vec{E} + n_0 \left(n_0 (\vec{\nabla} - \frac{\partial}{\partial t} \vec{n}) \cdot \vec{E} + \vec{n} \times \vec{B} \right) \right] = 0, \quad (1.32b)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0, \quad (1.32c)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0. \quad (1.32d)$$

Agora se reescrevemos as equações acima no espaço dos momentos, usando as Eqs. (1.10) da mesma maneira que foi feito para as Eqs. 1.11a-(1.11d), temos

$$\vec{k} \times \vec{B} = \omega \cdot \vec{E} - \frac{\beta^{(6)}}{M_{\text{P}}^2} \left[(n_0 \cdot \omega + \vec{n} \cdot \vec{k})^3 (n_0 \cdot \vec{E} + \vec{n} \times \vec{B}) + \vec{n} \left(\omega (n_0 \cdot \omega + \vec{n} \cdot \vec{k})^2 \vec{n} \cdot \vec{E} + \vec{k} (n_0 \omega + \vec{n} \cdot \vec{k})^2 (n_0 \cdot \vec{E} + \vec{n} \times \vec{B}) \right) \right], \quad (1.33a)$$

$$\vec{k} \cdot \vec{E} = \frac{\beta^{(6)}}{M_{\text{P}}^2} \left[n_0 \cdot \vec{k} (n_0 \cdot \omega + \vec{n} \cdot \vec{k})^2 (\vec{n} \cdot \vec{E} + n_0 \vec{k} \cdot \vec{E} + \vec{n} \times \vec{B}) - (n_0 \cdot \omega + \vec{n} \cdot \vec{k})^3 \vec{n} \cdot \vec{E} \right], \quad (1.33b)$$

$$\vec{k} \times \vec{E} = \omega \vec{B}, \quad (1.33c)$$

$$\vec{k} \cdot \vec{B} = 0. \quad (1.33d)$$

em que ω e \vec{k} são, respectivamente a frequência e o vetor onda da onda plana.

1.2.1 Modelo isotrópico

Abordando agora a condição submetida na sec. 1.1.1, da qual se refere à $n_\alpha = (n_0 = 1, \vec{0})$, vamos obter a relação de dispersão modificada para o caso de operadores de dimensão-6, ou seja, as Eqs. (1.30a) e (1.30b) são reduzidas as seguintes equações de movimento:

$$\partial_j F^{oj} + \frac{\beta^{(6)}}{M_{\text{P}}^2} \partial_j (\partial_0)^2 F^{0j} = 0, \quad (1.34)$$

$$-\partial_0 F^{ol} - \partial_m F^{ml} - \frac{\beta^{(6)}}{M_{\text{P}}^2} (\partial_0)^3 F^{0l} = 0. \quad (1.35)$$

Aqui fazemos o mesmo processo que foi feito para se obter a Eq. (1.16), então derivando com relação ao tempo a Eq. (1.35) e formando um sistema de Eq. (1.14), vamos obter uma equação em função apenas do setor elétrico, tal como

$$-(\partial_0)^2 F^{0l} - \partial^m (\partial_m F^{0l} - \partial^l F_{0m}) - \frac{\beta^{(6)}}{M_{\text{P}}^2} (\partial_0)^4 F^{0l} = 0. \quad (1.36)$$

Com isso podemos escrever usando a mesma relação para o campo elétrico simplificando nossa expressão, tal que é obtido:

$$-\partial^0 \partial_0 E^l - \partial^m (\partial_m E^l - \partial^l E_m) - \frac{\beta^{(6)}}{M_{\text{P}}^2} (\partial_0)^4 E^l = 0, \quad (1.37)$$

e vamos escreve-la para o caso de ondas planas, no qual usamos o Ansatz referente a Eq. (1.18), e daí temos:

$$k_0^2 E^l + k^m (k_m E^l - k^l E_m) - i \frac{\beta^{(6)}}{M_{\text{P}}^2} (k_0)^4 E^l = 0. \quad (1.38)$$

Partindo da Eq. (1.38) vamos utilizar o vetor onda $k_\rho = (\omega, 0, 0, p)$ de forma a fixar a direção de propagação da onda plana na direção \hat{z} . Neste ponto é necessária ser feita uma análise mais rigorosa com relação aos

índices, para se obter o conjunto de equações a seguir:

$$\begin{aligned} - \quad & \omega^2 E_1 + p^2 E_1 - \frac{\beta^{(6)}}{M_{\text{P}}^2} \omega^4 E_1 = 0, \\ - \quad & \omega^2 E_2 - \frac{\beta^{(6)}}{M_{\text{P}}^2} \omega^4 E_2 = 0, \\ - \quad & \omega^2 E_3 - \frac{\beta^{(6)}}{M_{\text{P}}^2} \omega^4 E_3 = 0, \end{aligned}$$

e olhando para o conjunto de equações apresentadas acima, a única equação com solução não-nula é a primeira. Sendo assim, evidenciando o campo elétrico E_1

$$(\omega^2 - p^2 + \frac{\beta^{(6)}}{M_{\text{P}}^2} \omega^4) E_1 = 0, \tag{1.39}$$

e como podemos ver, o campo E_1 é solução da Eq. (1.39), porém o campo E_1 é não-nulo, nos resta então que para satisfazer a equação temos:

$$\omega^2 - p^2 + \frac{\beta^{(6)}}{M_{\text{P}}^2} \omega^4 = 0. \tag{1.40}$$

Aqui é fácil ver que, para o caso em que temos $\beta^{(6)} = 0$, retornamos a solução da teoria usual encontrada na literatura para a teoria eletromagnética clássica. Temos também que a Eq. (1.40) é a relação de dispersão para o modelo com operador de dimensão-seis na condição de isotropia.

Pela Eq. (1.40), podemos explicitar uma solução, ao qual escrevemos o momento em função da frequência, assim chegando ao seguinte resultado:

$$p = \pm \omega \sqrt{1 + \frac{\beta^{(6)}}{M_{\text{P}}^2} \omega^2}. \tag{1.41}$$

então, derivando a Eq. (1.41) com relação a ω , chegamos em

$$v_g^{-1} = \frac{\partial p}{\partial \omega} = \frac{1 + 2 \frac{\beta^{(6)}}{M_{\text{P}}^2} \omega^2}{\left(1 + \frac{\beta^{(6)}}{M_{\text{P}}^2} \omega^2\right)^{1/2}}, \tag{1.42}$$

em que invertendo a Eq. (1.42) chegamos na velocidade de grupo². Ainda considerando $\frac{\beta^{(6)}}{M_{\text{P}}^2} \omega^2 \ll 1$, Podemos reescrever a velocidade de grupo de uma maneira aproximada, tal que assume a forma

$$v_g \approx 1 - \frac{3}{2} \frac{\beta^{(6)}}{M_{\text{P}}^2} \omega^2. \tag{1.43}$$

²Este resultado é possível devido ao teorema da função inversa que basicamente é $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} = \frac{1}{f'(x_0)}$ para $x_0 = f^{-1}(y_0)$ com $f' \neq 0$ e para f^{-1} contínua em y_0 [21].

Como sabemos a velocidade de grupo descreve a forma com que se propaga a onda. Para o operador de dimensão-seis, tanto a relação de dispersão, quanto a velocidade de grupo não sofrem efeito da birrefringência, logo eliminando o problema e sendo possível sua utilização para o cálculo de atraso temporal entre dois fótons.

Capítulo 2

Eletrodinâmica em altas ordens derivativas devido ao escalonamento de Hořava-Lifshitz

A teoria de Hořava-Lifshitz tem sido também proposta como uma alternativa para descrever um comportamento Ultravioleta (UV) da relatividade geral [22]. É conhecido que a relatividade geral não é renormalizável no UV como sua principal constante tendo a seguinte análise dimensional: $[G] = [M]^{-2}$, com $[M]$ sendo a unidade de massa. O principal intuito do método é introduzir uma certa assimetria entre o espaço e tempo parametrizada pelo expoente crítico de Lifshitz, z . Note que isso pode ser abordado de duas maneiras: *i*) A dimensão de tempo é $[t] = [L]^z$, e as dimensões das coordenadas espaciais é $[\vec{r}] = [L]$; *ii*) A dimensão de tempo é $[t] = [L]$, e as dimensões das coordenadas espaciais são $[\vec{r}] = [L]^z$. Aqui, $[L]$ é a unidade de comprimento.

Os efeitos dessas assimetrias são possibilitar um ajuste na dimensionalidade da constante de acoplamento, e assim, escolher de forma criteriosa, o valor do expoente crítico z . Espera-se com isto, que as interações sejam renormalizáveis. Isto pode acontecer de fato, por exemplo, na Ref.[22], foi mostrado que em $z \geq 3$ é suficiente para garantir o caráter renormalizável no UV da relatividade geral. Neste capítulo, estudamos como isto deve afetar na eletrodinâmica sem e com os efeitos da LIV.

2.1 Eletrodinâmica sob a ação do expoente crítico

Veja, a seguir, o lado prático do reescalonamento de Hořava-Lifshitz (preservando a invariância de calibre), quando aplicado a uma teoria de campos tal como eletrodinâmica para ambos os casos já mencionados.

2.1.1 Modificação tipo Hořava-Lifshitz no setor do campo magnético

Uma possibilidade para inserir o expoente crítico, ou seja, fazendo uma modificação tipo Hořava-Lifshitz, é encontrada na Ref. [8], modificando o setor magnético da teoria e "Lifshitzizando" o fóton, se tornando assim bem próximas a teoria de Hořava de gravidade, e podendo ser escrita da seguinte forma

$$S_{M,HL} = -\frac{1}{2} \int dt d^3\vec{x} \left[F_{0i}F^{0i} + \frac{1}{2}F_{ij}(-\Delta)^{z-1}F^{ij} \right], \quad (2.1)$$

onde $\Delta = -\partial_i\partial^i = \vec{\partial} \cdot \vec{\partial}$, a métrica usada é $\text{diag}(1, -1, -1, -1)$, e z , como já sabemos, é o expoente crítico de Lifshitz. Aqui foi introduzido o expoente crítico na teoria eletromagnética com a intenção de quebra de simetria, porém para $z = 1$, retornamos a teoria usual. Note que a proposta dada pela Eq. (2.1) deve se ajustar ao primeiro caso de discretização do espaço tempo: ($[t] = [L]^z$, $[\vec{r}] = [L]$). Por consequência temos que as respectivas derivadas devem seguir as regras de dimensionalidade:

$$[\partial_t] = [L]^{-z}, \quad [\partial_i] = [L]^{-1}. \quad (2.2)$$

E, como a ação é adimensional, então as dimensões dos campos serão:

$$[A_0] = [L]^{-\frac{1}{2}(z+1)}, \quad [A_i] = [L]^{\frac{1}{2}(z-3)}. \quad (2.3)$$

Notando que ao assumir $z = 1$, recuperamos a teoria de Maxwell. A partir daí, podemos definir nossos termos para o novo reescalonamento, sendo esses termos os seguintes

$$\begin{aligned} t &\rightarrow \Lambda_{\text{HL}}^{-z+1}t, \quad A_0 \rightarrow \Lambda_{\text{HL}}^{\frac{1}{2}(z-1)}A_0, \\ A_i &\rightarrow \Lambda_{\text{HL}}^{-\frac{1}{2}(z-1)}A_i, \quad \partial_t \rightarrow \Lambda_{\text{HL}}^{(z-1)}\partial_t. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Neste caso, a dimensão para a escala de Hořava-Lifshitz Λ_{HL} seguirá a regra: $[\Lambda_{\text{HL}}] = [L]^{-1}$, devido ao processo de reescalonamento. Enquanto que as demais quantidades terão as seguintes estruturas dimensionais: $[t] = [L]$, $[\partial_t] = [A_0] = [A_i] = [L]^{-1}$. Aplicando a Eq.(2.4) na Eq.(2.1), obtemos

$$S_{M,HL} = -\frac{1}{2} \int dt d^3\vec{x} \left[F_{0i}F^{0i} + \frac{1}{2\Lambda_{\text{HL}}^{2(z-1)}}F_{ij}(-\Delta)^{z-1}F^{ij} \right], \quad (2.5)$$

logo nós "Lifshitzamos" o fóton, sem a necessidade de uma quebra de calibre como veremos a seguir e que foi explicitamente estudada pela Ref. [8]. No Apêndice B.1, pode-se encontrar detalhadamente como chegar a Eq. (2.5), usando o reescalonamento de Hořava-Lifshitz, assim como nos apêndices seguintes, pode ser também encontrado como trabalhar com o escalonamento de Hořava-Lifshitz de maneira detalhada e observando suas implicações nos cálculos de equações de movimento, propagadores e relações de dispersão, tornando mais simples o entendimento dessa parte do trabalho.

Invariância de Calibre

Como foi dito antes, mostraremos aqui, que apesar da inserção do termo de Hořava-Lifshitz, a teoria continua invariante ao calibre, e com isso poderemos chegar as relações de dispersão, assim como é feito na teoria usual. Para tanto, podemos verificar, ao usarmos uma análise semelhante ao formalismo de Arnowitt-Deser-Misner na gravidade de Lifshitz [8, 23]. Logo, consideremos a decomposição dos campos A_0 e $A_i = A_i^T + \partial_i\varphi$, e vamos substituir na Eq. (2.5) tal que possamos reescrever a ação como;

$$S = \frac{1}{2} \int dx^4 A_i^T \left\{ \left[\left(\partial_t^2 + \Lambda_{\text{HL}}^{-2(z-1)} (-\Delta)^z \right) \eta^{ik} \right] A_k^T + (A^0 + \dot{\varphi}) \Delta (A^0 + \dot{\varphi}) \right\}, \quad (2.6)$$

logo percebemos, que apesar da decomposição do campo $A_i = A_i^T + \partial_i\varphi$, o mesmo não sofre alteração alguma se mantendo então invariante. Por outro lado percebemos que para o campo A_0 que não havia sido decomposto, sofre uma mudança em que possui a seguinte simetria de calibre:

$$A_0 \rightarrow A'_0 = A_0 + \dot{\omega} \quad ; \quad \varphi \rightarrow \varphi' = \varphi - \omega, \quad (2.7)$$

assim como na simetria de calibre usual:

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \omega.$$

Aplicando agora a condição de calibre $A_0 = 0$, em meio a algumas integrações por partes [24], teremos a ação descrita por:

$$S = \frac{1}{2} \int d^4x A^i \left\{ \left[\partial_t^2 + \frac{(-\Delta)^z}{\Lambda_{\text{HL}}^{2(z-1)}} \right] \eta_{ij} \right\} A^j, \quad (2.8)$$

2.1.2 Modificação tipo Hořava-Lifshitz no setor do campo elétrico

Uma possibilidade alternativa desenvolvida por nós, foi a de inserir o expoente crítico via a modificação do setor do campo elétrico da teoria. Neste caso, temos:

$$S_{M,HL}^{(2)} = -\frac{1}{2} \int dt d^3\vec{x} \left[F_{0i} (i\partial_t)^{2(z-1)} F^{0i} + \frac{1}{2} F_{ij} F^{ij} \right]. \quad (2.9)$$

Aqui como o reescalamento afetará o setor do campo elétrico da teoria, as dimensões serão alteradas, de forma a se tornarem ($[t] = [L]$, $[\vec{r}] = [L]^z$) e com isso serem compatíveis com a Eq. (2.9). Assim, as regras de derivação são da forma:

$$[\partial_0] = [L]^{-1}, \quad [\partial_i] = [L]^{-z},$$

e como sabemos, a ação continuar adimensional, para isso os campo devem ter as seguintes dimensões:

$$[A_i] = [L]^{-\frac{1}{2}(z+1)}, \quad [A_0] = [L]^{\frac{1}{2}(z-3)}, \quad (2.10)$$

em que para $z = 1$ recuperamos a teoria de Maxwell. A partir dai, podemos definir nossos termos para o novo reescalonamento, sendo esses termos os seguintes:

$$\begin{aligned} A_i &\rightarrow \Lambda_{\text{HL}}^{\frac{1}{2}(z-1)} A_i, \quad \partial_i \rightarrow \Lambda_{\text{HL}}^{(z-1)} \partial_i, \\ A_0 &\rightarrow \Lambda_{\text{HL}}^{-\frac{1}{2}(z-1)} A_0, \quad \vec{x} \rightarrow \Lambda_{\text{HL}}^{-(z-1)} \vec{x}, \end{aligned} \quad (2.11)$$

para mais detalhes de como deve ser feita a escolha do escalonamento ver Apêndice C.1. Assim, da mesma maneira que foi feito ao outro modelos, vamos aplicar o reescalonamento (2.11) na Eq. (2.9), chegando na nossa ação que é dada por:

$$S_{\text{M,HL}}^{(2)} = -\frac{1}{2} \int dt d^3 \vec{x} \left[\frac{1}{\Lambda_{\text{HL}}^{2(z-1)}} F_{0i} (i\partial_t)^{2(z-1)} F^{0i} + \frac{1}{2} F_{ij} F^{ij} \right], \quad (2.12)$$

em que percebemos para $z = 1$, também retornamos a teoria usual de Maxwell como era desejado e violando a invariância de Lorentz para $z \neq 1$.

Invariância de Calibre

A partir da ação obtida para o segundo modelo do tipo Hořava-Lifshitz, expressa pela Eq. (2.12), vamos verificar a invariância de calibre do modelo de maneira análoga ao feito anteriormente, o qual é usado o formalismo de Arnowitt-Deser-Misner. Então, consideramos a seguinte decomposição dos campos: A_0 e $A_i = A_i^T + \partial_i \varphi$, com isso, podemos reescrever os tensores a partir da decomposição de campos tal que é descrita na Eq. (2.7) e com algumas integrações por parte como:

$$\begin{aligned} \int dt d^3 \vec{x} F_{0i} (i\partial_0)^{2(z-1)} F^{0i} &= \int dt d^3 \vec{x} \left[-A_i^T (i\partial_0)^{2z} \eta^{ij} A_j^T - (A_0 + \dot{\varphi}) (i\partial_0)^{2(z-1)} \partial_i \partial^i (A_0 + \dot{\varphi}) \right], \\ \int dt d^3 \vec{x} F_{ij} F^{ij} &= - \int dt d^3 \vec{x} 2A_i^T \partial_i \partial^i \eta^{ij} A_j^T, \end{aligned}$$

Em que substituindo na Eq. (2.12), que se referia a ação inicial reescalonada para o campo elétrico, obtemos

$$S_{\text{M,HL}}^{(2)} = \frac{1}{2} \int dt d^3 \vec{x} \left\{ A_i^T \left[\frac{1}{\Lambda_{\text{HL}}^{2(z-1)}} (i\partial_0)^{2z} + \partial_i \partial^i \right] \eta^{ij} A_j^T + (A_0 + \dot{\varphi}) \left(i \frac{\partial_0}{\Lambda_{\text{HL}}} \right)^{2(z-1)} \partial_i \partial^i (A_0 + \dot{\varphi}) \right\}. \quad (2.13)$$

Logo percebemos que a simetria de calibre é mantida de acordo com as condições colocadas na Eq. (2.7), e da mesma forma, tem-se a equivalência com a simetria de calibre usual, como foi afirmado anteriormente.

2.2 Eletrodinâmica com o operador de dimensão-5 sob a ação do expoente crítico de Lifshitz

Para estudar a ação do expoente crítico de Lifshitz para o caso da LIV devido aos efeitos do operador de dimensão-5, devemos primeiro considerar a Eq. (1) tal que sua estrutura nos conduz a reescalonar-la

de acordo com o que foi realizado na Subsec.(2.1.1), quando reescalamos o setor do campo magnético da eletrodinâmica que inicialmente sofreu uma modificação imposta na Eq. (2.1). Então, partindo deste princípio, temos

$$S_{\text{MP,HL}} = \frac{\xi}{2M_P} \int d^4x \varepsilon^{ijk} A_i (i\partial_t)^2 (-\Delta)^{(z-1)/2} F_{jk}. \quad (2.14)$$

Tendo isso em mãos, devemos agora reescalonar de forma a adicionar o termo de escala de Hořava-Lifshitz Λ_{HL} a Eq. (2.14), mas neste caso temos ainda a presença da massa de Planck que possui dimensão $[M_P] = [L]^{-z}$, e cujo seu reescalonamento é descrito pela transformação

$$M_P \rightarrow \Lambda_{\text{HL}}^{z-1} M_P. \quad (2.15)$$

Então aplicando os reescalamentos dados pelas Eqs. (2.4) e (2.15) ao termo de Myers-Pospelov escalonado dado pela Eq. (2.14), chegamos em:

$$S_{\text{MP,HL}} = -\frac{1}{2} \int dt d^3x \frac{\xi R_{\text{HL}}}{\Lambda_{\text{HL}}^z} \varepsilon^{ijk} A_i \partial_t^2 (-\Delta)^{(z-1)/2} F^{jk}, \quad (2.16)$$

onde $R_{\text{HLP}} = \frac{\Lambda_{\text{HL}}}{M_P}$ é a razão entre a escala Λ_{HL} de Hořava-Lifshitz e a escala de Planck M_P . Essa razão pode ser considerada muito pequena da faixa de $R_{\text{HLP}} \sim 10^{-9}$, sendo uma nova maneira de quebra de supersimetria explícita, sem reintroduzir ajuste fino [8] (ver também [25]).

Então, ao adicionarmos a Eq. (2.5) com Eq. (2.16), de fato, nosso modelo pode ser finalizado com a ação sendo da forma:

$$S = -\frac{1}{2} \int dx^4 \left[F_{0i} F^{0i} + \frac{1}{2\Lambda_{\text{HL}}^{2(z-1)}} F_{ij} (-\Delta)^{(z-1)} F^{ij} + \frac{\xi R_{\text{HL}}}{\Lambda_{\text{HL}}^z} \varepsilon^{ijk} A_k \partial_t^2 (-\Delta)^{(z-1)/2} F^{ij} \right], \quad (2.17)$$

É evidente que agora, a ação de nosso modelo, possui os termos do escalonamento de Hořava-Lifshitz e o de quebra de simetria de Lorentz. Observemos também que aplicando o limite no qual $\xi \rightarrow 0$, nos recuperamos a invariância de calibre eletrodinâmica do tipo Lifshitz Eq. (2.5).

2.2.1 Invariância de calibre

Como já foi visto, apesar da eletrodinâmica clássica de Maxwell ser modificada pelo reescalonamento Hořava-Lifshitz, a invariância de calibre da teoria foi preservada conforme era prevista.

Agora o mesmo deve acontecer para o termo de Myers-Pospelov reescalonado e assim verificar que continua invariante de calibre. Para isso, do formalismo de Arnowitt-Deser-Misner, na gravidade de Lifshitz [23, 8] será usado novamente para mostrar que a Eq. (2.6) continua invariante. Dessa forma, analisando o ultimo termo referente a Eq. (2.17), temos:

$$S = -\frac{1}{2} \int dx^4 \frac{\xi R_{\text{HL}}}{\Lambda_{\text{HL}}^z} \varepsilon^{ijk} A_k \partial_t^2 (-\Delta)^{(z-1)/2} F^{ij}. \quad (2.18)$$

Por momento deixaremos as constantes que multiplicam os campos de lado, pois não influenciarão no resultado, e vamos considerar a decomposição dos campos, A_0 e $A_i = A_i^T + \partial_i \varphi$, em que quando aplicado ao termo adicional temos

$$\int dt d^3 \vec{x} A_k \partial_t^2 (-\Delta)^{(z-1)/2} F^{ij} = - \int dt d^3 \vec{x} 2A_k^T \partial_t^2 (-\Delta)^{(z-1)/2} \partial_j A_i^T, \quad (2.19)$$

e substituindo o resultado da Eq. (2.19) na Eq. (2.18), a ação toma a seguinte forma

$$S = \frac{1}{2} \int dx^4 A_i^T \left\{ \left[\left(\partial_t^2 + \Lambda_{\text{HL}}^{-2(z-1)} (-\Delta)^z \right) \eta^{ik} + 2 \frac{\xi R_{\text{HL}}}{\Lambda_{\text{HL}}^z} \varepsilon^{ijk} \partial_t^2 (-\Delta)^{(z-1)/2} \partial_j \right] A_k^T + (A^0 + \varphi) \Delta (A^0 + \varphi) \right\}. \quad (2.20)$$

Aqui foi acrescido a primeira parte da Eq. (2.20), o resultado obtido na subsec. 2.1.1, expressa pela Eq. (2.8) e as constantes que foram desconsideradas por questão de simplificação.

Ao compararmos o resultado com a Eq.(2.7), é perceptível o fato que a simetria se mantém a mesma, embora tenha a adição do termo de Myers-posselov reescalado. Conseqüentemente, a teoria em questão não afeta a invariância de calibre, sendo equivalente com a simetria de calibre usual.

2.2.2 Relação de dispersão

Partindo da Eq. (2.17), somado com o termo de fixação de calibre em conjunto, no qual escolhemos a condição de calibre $A_0 = 0$, e chegamos na Lagrangeana

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2} \int dx^4 A_i^T \left\{ \left[\left(\partial_t^2 + \Lambda_{\text{HL}}^{-2(z-1)} (-\Delta)^z \right) \eta^{ik} - 2 \frac{\xi R_{\text{HL}}}{\Lambda_{\text{HL}}^z} \varepsilon^{ijk} \partial_t^2 (-\Delta)^{(z-1)/2} \partial_j \right] A_k^T \right\}. \quad (2.21)$$

A relação de dispersão, para a teoria, pode ser dada quando escrevemos a (2.21) em uma representação de momento, em que o torna equivalente ao Ansatz para ondas planas, e igualamos a zero, nos levando a expressão a seguir:

$$(\omega^2 - \Lambda_{\text{HL}}^{-2(z-1)} k^{2z})^2 - 4(\xi R_{\text{HLP}})^2 (\Lambda_{\text{HL}})^{-2z} \omega^4 k^{2z} = 0, \quad (2.22)$$

em que podemos solucionar a relação de dispersão acima para obtermos as soluções de frequência, e assim encontrarmos um conjunto de restrições na LIV para efeitos da birrefringência do vácuo, usando observações de GRBs. Daí solucionando a relação de dispersão acima temos

$$\omega_\lambda = \frac{k^z}{\Lambda_{\text{HL}}^{(z-1)} \sqrt{1 - 2\lambda \xi R_{\text{HLP}} (\Lambda)^{-z} k^z}}, \quad (2.23)$$

onde o parâmetro $\lambda = \pm 1$ representa as duas polarizações possíveis para este fenômeno. Note também que para o caso em que tomamos o limite $\xi_\gamma \rightarrow 0$ em $z = 1$, são reproduzidos as soluções usuais. Para $\xi \neq 0$ em $z = 1$, temos soluções associadas com os efeitos produzidos por operadores de dimensão-cinco [2] (ver também [5]).

Fazendo uma expansão da Eq. (2.23) através do uso da condição $k^z \ll 1/2\xi R_{\text{HLP}}(\Lambda)^{-z}$, nos leva a seguinte solução:

$$\omega_\lambda \approx \frac{k^z}{(\Lambda_{\text{HL}})^{z-1}} + \frac{\lambda(\xi R_{\text{HLP}})k^{2z}}{(\Lambda_{\text{HL}})^{2z-1}}, \quad (2.24)$$

em que podemos considerar soluções aproximadas associadas com a seguinte relação de dispersão modificada:

$$\omega^2 - \frac{k^{2z}}{(\Lambda_{\text{HL}})^{2(z-1)}} - \frac{2\lambda(\xi R_{\text{HLP}})}{(\Lambda_{\text{HL}})^{3z-2}}k^{3z} = 0. \quad (2.25)$$

Para $z = 1$, nós recuperamos as modificações cúbicas na Ref. [2]. E para $z > 1$ encontramos novas expressões para uma influência direta do expoente crítico de Lifshitz.

Note que as soluções da Eq. 2.25 podem se decompostas em dois setores, $\omega(k) \rightarrow \omega_{\text{nb}}(k) + \omega_{b\pm}(k)$, um não-birrefringente e outro birrefringente. Isto pode ser feito ao adicionarmos na (2.24) os valores, $+k - k$. O setor não birrefringente é dado por

$$\omega_{\text{nb}} = -k + \frac{k^z}{(\Lambda_{\text{HL}})^{z-1}}. \quad (2.26)$$

Em $z = 1$, a quantidade não birrefringente desaparece. Porém, para $z > 1$, a relação de dispersão pode ser associada com um modelo específico que quebra a invariância de calibre [8]. O setor birrefringente pode ser escrito na forma

$$\omega_\lambda = k \pm \frac{(\xi_\gamma R_{\text{HLP}})k^{2z}}{(\Lambda_{\text{HL}})^{2z-1}}, \quad (2.27)$$

que nos leva para uma rotação da polarização durante a propagação de fótons linearmente polarizados. Para o expoente crítico de Lifshitz $z = 1$, nós encontramos a correção de ordem $\xi(M_p)^{-1}k^2$ conectada a operadores de dimensão cinco. E para $z = 2$, foi encontrado a correção de ordem $(\xi R_{\text{HLP}})(\Lambda_{\text{HL}})^{-3}k^2$ associada com operadores de dimensão sete. Além disso, se considerarmos um expoente crítico intermediário $z = 3/2$, chegamos a uma correção de ordem $(\xi R_{\text{HLP}})(\Lambda)^{-2}k^3$ associada a operadores de dimensão seis.

2.3 Eletrodinâmica com o operador de dimensão-seis sob a ação do expoente crítico de Lifshitz

Com base na subsec. 2.1.2, em que foi construído um escalonamento do tipo Hořava-Lifshitz para a equação de Maxwell que descreve a eletrodinâmica clássica, obtendo assim uma teoria modificada para o setor elétrico, vamos agora aplicar da mesma forma o escalonamento para o operador de dimensão-seis, sujeito a condição de isotropia dada na Eq. (3b). Por conseguinte, o termo de Myers-Pospelov de dimensão-seis quando reescalonado torna-se:

$$S_{\text{MP}} = \frac{\beta^{(6)}}{2(M_P)^2} \int dt d^3 \vec{x} \frac{1}{\Lambda_{\text{HL}}^{2(z-1)}} F_{0i} (i\partial_t)^{2z} F^{0i}. \quad (2.28)$$

Uma diferença que é bem evidente, é o caso para operadores de dimensão-cinco tratado na seção anterior, que se fez necessário o escalonamento da massa de Planck M_P , fato que não houve necessidade para o caso de dimensão-seis, pois a mesma após o reescalonamento se manteve adimensional, assim dispensado qualquer alteração em sua dimensão.

Portanto, podemos agora escrever nosso modelo completo através do nosso novo reescalonamento, somando o termo de Maxwell modificado Eq. (2.12) ao de Myers-Pospelov modificado Eq. (2.28), chegamos em

$$S_{\text{MP,HL}} = -\frac{1}{2} \int dt d^3 \vec{x} \left\{ \left[\frac{1}{\Lambda_{\text{HL}}^{2(z-1)}} F_{0i} (i\partial_t)^{2(z-1)} F^{0i} + \frac{1}{2} F_{ij} F^{ij} \right] - \frac{\beta^{(6)} (R_{\text{HLP}})^2}{\Lambda_{\text{HL}}^{2z}} F_{0i} (i\partial_t)^{2z} F^{0i} \right\}, \quad (2.29)$$

em que tanto possui o termo de quebra de simetria de Lorentz devido a presença do termo de Myers-Pospelov, quanto o expoente crítico z do escalonamento de Hořava-Lifshitz. Note que ao fazermos o limite $\xi \rightarrow 0$ para $z = 1$, nós recuperamos o resultado da teoria usual da eletrodinâmica.

2.3.1 Invariância de Calibre

Conforme ao que já foi feito anteriormente, para analisar a invariância de calibre de nosso modelo, vamos utilizar a mesma decomposição dos campos, A_0 e $A_i = A_i^T + \partial_i \varphi$, tal como feita na Eq. (2.13). Consequentemente o termo de Myers-pospelov modificado e sob a condição de isotropia, resulta na seguinte decomposição dos campos:

$$\int dt d^3 \vec{x} F_{0i} (i\partial_t)^{2z} F^{0i} = \int dt d^3 \vec{x} A_i^T (i\partial_t)^{2z+2} \eta^{ij} A_j^T + (A_0 + \varphi) (i\partial_t)^{2z} \partial_i \partial^i (A_0 + \varphi), \quad (2.30)$$

onde vamos adicionar a Eq. (2.30) à Eq. (2.13), chegando na ação;

$$S_{\text{MP,HL}}^{(2)} = \frac{1}{2} \int dt d^3 \vec{x} \left\{ A_j^T \left[\frac{1}{\Lambda_{\text{HL}}^{2(z-1)}} (i\partial_t)^{2z} + (\partial_i \partial^i) + \frac{\beta^{(6)} (R_{\text{HLP}})^2}{\Lambda_{\text{HL}}^{2z}} (i\partial_t)^{2(z+1)} \right] \eta^{jk} A_j^T \right. \\ \left. + (A_0 + \varphi) \left[\frac{1}{\Lambda_{\text{HL}}^{2(z-1)}} (i\partial_t)^{2(z-1)} + \frac{\beta^{(6)} (R_{\text{HL}})^2}{\Lambda_{\text{HL}}^{2z}} (i\partial_t)^{2z} \right] (\partial_i \partial^i) (A_0 + \varphi) \right\}. \quad (2.31)$$

Aqui percebemos que, tal como acontecido com o termo adicional de Myers-Pospelov de dimensão-cinco, o qual houve a modificação no setor magnético, mas a invariância de calibre foi mantida, a modificação do setor elétrico também não interfere na simetria de calibre descrita pela Eq. (2.7).

2.3.2 Relação de dispersão

Iniciaremos aqui submetendo a Eq. (2.29), a condição de calibre $A_0 = 0$, associado a algumas integrações por partes, do qual a Eq. (2.31) será resumida em na ação que será usada para determinar a relação de dispersão de nossa teoria, dada por:

$$S_{\text{MP,HL}}^{(2)} = \frac{1}{2} \int dt d^3 \vec{x} \left\{ A_j^T \left[\frac{1}{\Lambda_{\text{HL}}^{2(z-1)}} (i\partial_t)^{2z} + (\partial_i \partial^i) + \frac{\beta^{(6)} (R_{\text{HLP}})^2}{\Lambda_{\text{HL}}^{2z}} (i\partial_t)^{2(z+1)} \right] \eta^{jk} A_j^T \right\}. \quad (2.32)$$

No que diz respeito a ação modificada pelo reescalonamento Hořava-Lifshitz para dimensão-seis, o resultado desejado pode ser obtido da Eq. (2.32), quando igualarmos a zero, podemos obter a seguinte equação

$$\left(\frac{1}{\Lambda_{\text{HL}}^{2(z-1)}} (i\partial_t)^{2z} + (\partial_i \partial^i) + \frac{\beta^{(6)} (R_{\text{HLP}})^2}{\Lambda_{\text{HL}}^{2z}} (i\partial_t)^{2(z+1)} \right) \eta^{km} A_m = 0, \quad (2.33)$$

com o objetivo de encontrarmos uma equação que nos descreve a relação de dispersão para o nosso modelo, vamos aplicar o Ansatz para ondas planas, e assim analisar as modificações causadas devido a alteração feita no setor elétrico até aqui utilizado. Logo

$$A^k(x) = \epsilon^k(p) \exp(-ik_\mu x^\mu) \quad ; \quad k_\mu = (\omega, \vec{k}),$$

onde $k = |\vec{k}|$, chegamos em

$$k^2 - \frac{\omega^{2z}}{\Lambda_{\text{HL}}^{(z-1)}} - \frac{\beta^{(6)} (R_{\text{HLP}})^2}{\Lambda_{\text{HL}}^{2z}} \omega^{2(z+1)} = 0. \quad (2.34)$$

Uma coisa a ser observada na Eq. (2.34), é que para o caso em que $z = 1$, além de não haver nenhum termo da energia de Hořava-Lifshitz, temos a presença de uma modificação de $O(E^4)$ na relação de dispersão. Isso acontece devido a presença de um operador de dimensão-seis, e se compararmos ao caso de dimensão-cinco Eq. (2.25) o qual possui uma modificação da ordem $O(E^3)$ para a mesma condição, percebemos que uma alteração perceptível, é que as modificações atribuídas aos termos de altas ordens derivativas, influenciam de forma proporcional a ordem da energia do termo modificado. Outra coisa a ser vista, é que como $\omega \ll M_P$, podemos tratar ambos os casos como pequenas perturbações atribuídas aos operadores de altas ordens derivativas e consequentemente serão sempre limitados aos parâmetros do tipo $1/M_P$ [2].

A partir da relação de dispersão Eq. (2.34), é possível agora testar nosso modelo, ao solucionarmos ela com relação ao momento em que a temos em função da energia

$$k = \pm \frac{\omega^z}{\Lambda_{\text{HL}}^{z-1}} \sqrt{1 + \beta^{(6)} (R_{\text{HLP}})^2 \Lambda_{\text{HL}}^{-2} \omega^2}, \quad (2.35)$$

considerando o segundo termo da raiz pequeno ou seja, $\beta^{(6)} (R_{\text{HLP}})^2 \Lambda_{\text{HL}}^{-2} \omega^2 \ll 1$, podemos fazer uma expansão que nós leva à

$$k = \pm \left[\frac{\omega^z}{\Lambda_{\text{HL}}^{z-1}} + \frac{1}{2} \frac{\beta^{(6)} (R_{\text{HLP}})^2}{\Lambda_{\text{HL}}^{z+1}} \omega^{z+2} \right], \quad (2.36)$$

somando os termos $+\omega$ e $-\omega$ a Eq. (2.36), definimos o momento k como a soma de dois outros termos, onde um é o momento associado a teoria de Maxwell reescalonada e o outro o termo referente a parte adicional de Myers-Pospelov também reescalonada

$$k = \pm \left[-\omega + \frac{\omega^z}{\Lambda_{\text{HL}}^{z-1}} + \omega + \frac{1}{2} \frac{\beta^{(6)} (R_{\text{HLP}})^2}{\Lambda_{\text{HL}}^{z+1}} \omega^{z+2} \right], \quad (2.37)$$

dessa forma, os dois termos acima mencionados com relação ao momentos, são descritos da seguinte forma

$$k = k_{\text{HL}} + k_{\text{HLP}}$$

onde o termo de Maxwell reescalonado é dado por

$$k_{\text{HL}} = \pm \left(-\omega + \frac{\omega^z}{\Lambda_{\text{HL}}^{z-1}} \right), \quad (2.38)$$

é de fácil percepção que para $z = 1$, a Eq. (2.38) que é referente ao termo de maxwell reescalonado desaparece. Porém para um expoente crítico $z > 1$, a relação de dispersão pode ser associada a algum modelo específico que quebra a invariância de calibre [8].

O segundo termo advindo do operador de dimensão-seis tem a forma

$$k_{\text{HLP}} = \pm \left(\omega + \frac{1}{2} \frac{\beta^{(6)}(R_{\text{HLP}})^2}{\Lambda_{\text{HL}}^{z+1}} \omega^{z+2} \right), \quad (2.39)$$

ao considerarmos o expoente crítico de Lifshitz $z = 1$, temos uma correção da ordem $\beta^{(6)}(M_{\text{P}})^{-2}\omega^3$ conectados com operadores de dimensão-seis. No caso em que $z = 2$ a correção é da ordem $\beta^{(6)}(R_{\text{HLP}})^2\Lambda_{\text{HL}}^{-3}\omega^4$ relacionado a operadores de dimensão-sete. Além disso, para $z = 3$ a ordem da correção é $\beta^{(6)}(R_{\text{HLP}})^2\Lambda_{\text{HL}}^{-4}\omega^5$ relacionado a operadores de dimensão-oito.

2.3.3 Velocidade de Grupo

Considerando a parte do operador em que quebra a simetria de Lorentz devido a presença do expoente crítico z , em conjunto com o operador de dimensão-seis descrito pela Eq. (2.39), vamos calcular a velocidade de grupo que pode ser dada por:

$$v_g^{-1} = \frac{\partial k}{\partial \omega} = \left[1 + \frac{(z+2)}{2} \beta^{(6)}(R_{\text{HLP}})^2 \left(\frac{\omega}{\Lambda_{\text{HL}}} \right)^{z+1} \right]. \quad (2.40)$$

Logo, usando o inverso da expressão anterior, podemos encontrar a velocidade de grupo, que é igual à

$$v_g = \frac{1}{1 + \frac{(z+2)}{2} \beta^{(6)}(R_{\text{HLP}})^2 \left(\frac{\omega}{\Lambda_{\text{HL}}} \right)^{z+1}}. \quad (2.41)$$

Agora se temos que $\beta^{(6)}(R_{\text{HL}})^2 \ll 1$, podemos escreve-la de forma aproximada através da expansão

$$v_g \approx \left[1 - \frac{(z+2)}{2} \beta^{(6)}(R_{\text{HLP}})^2 \left(\frac{\omega}{\Lambda_{\text{HL}}} \right)^{z+1} \right]. \quad (2.42)$$

De uma maneira simples, é possível perceber que no caso de assumirmos o valor do expoente crítico como sendo $z = 1$, a velocidade de grupo retorna ao valor da teoria desenvolvida no primeiro capítulo, na sec. 1.2.1, que já era esperado.

Capítulo 3

Fenomenologia

Como foi dito no capítulo anterior, uma das aplicações observacionais em astrofísica, são medições do grau de polarização da velocidade de propagação de fótons, em que tem sido considerada a possibilidade de ocorrência de pequenas violações da invariância de Lorentz na natureza. Outra aplicação que tem a possibilidade de haver influencia da LIV, é na medição do atraso temporal de fótons, vindos das explosões de raios gama GRBs. Por isso este capítulo foi dividido em duas partes, onde primeiramente estudaremos possíveis restrições ao parâmetro ξ sobre o efeito do expoente crítico de Lifshitz. Neste sentido, consideramos as recentes determinações de explosões de raios grama, em particular, dados relacionados ao evento (GRB191204A) através dos quais se observou um grau elevado de polarização da radiação emitida. Após isso, faremos um estudo do parâmetro $\beta^{(6)}$, que está relacionada com operadores de dimensão seis, que são ideais para estudo de atraso temporal de fótons. Para isso, usaremos os dados de 4 eventos distintos de GRB, sendo eles (080916c), (090510), (090902b) e (090926).

3.1 Explosões de Raios Gama

As explosões de raios gama, conhecidas do inglês como Gamma-Ray Bursts ou pela sigla **GRB**, foram inicialmente detectados no final da década de 1960, quando se tinha o monitoramento de satélites militares para garantir que o tratado de proibição de testes nucleares fosse respeitado. Essa informação a princípio, não veio a público de imediato, mas apenas alguns anos depois, com a publicação dos resultados dos satélites Vela (Satélites de reconhecimento americano), que foram rapidamente confirmados por dados dos satélites soviéticos Konus. Sua natureza e origem permaneceram depois disso um mistério por mais de duas décadas, em grande parte devido ao fato de que, durante esse período, permaneceram detectáveis somente por dezenas de segundos, quase que exclusivamente em energias de raios gama, com relatos ocasionais em energias de raios x. Vários satélites a partir de então, continuaram acumulando dados em centenas de **GRB** ao longo dos anos, atraindo uma atenção crescente e levando a uma grande variedade de

modelos teóricos com o objetivo de descobrir sua origem[26].

Ainda sobre esses eventos, sabemos que emitem a maior quantidade de energia por unidade de tempo (potência de emissão de radiação) no universo. Uma única explosão, com uma duração típica de alguns segundos, pode emitir tanta energia em raios gama quanto o Sol vai emitir durante toda a sua vida, ou seja, em 10 bilhões de anos, em todas as faixas do espectro eletromagnético. Isso é comparável a transformar inteiramente a massa do Sol em energia - de acordo com a famosa fórmula ($E = mc^2$) de Einstein - em algumas dezenas de segundos, ou emitir, durante esse período de tempo, a mesma energia que a nossa Galáxia inteira emite em 100 anos [27].

Devido às distâncias imensas da maioria das fontes de explosão de raios gama da Terra, a identificação da causa que produzem essas explosões é um desafio. A associação de alguns GRBs longos com supernovas e o fato de suas galáxias hospedeiras serem rapidamente formadoras de estrelas, oferecem evidências muito fortes de que rajadas de raios gama longas estão associadas a estrelas massivas, no qual o núcleo dessa estrela, de baixa metalicidade e de rotação rápida, colapsa em um buraco negro nos estágios finais de sua evolução.

3.2 A Birefringência entre a Propagação de Fótons

3.2.1 Polarização da Luz

A birrefringência do vácuo é um efeito importante para obtermos limites nos parâmetros da violação de Lorentz. Assim, assumindo a relação de dispersão dada pela Eq. (2.27) encontramos que a direção de polarização rotaciona durante a propagação ao longo de uma distancia d e é dado por:

$$\Delta\theta(d) = \frac{(\omega_{b_+}(k) - \omega_{b_-}(k))d}{2} \approx \frac{\xi (R_{\text{HLP}})K^{2z}d}{2 (\Lambda_{\text{HL}})^{2z-1}}. \quad (3.1)$$

A expressão acima relata o grau de radiação polarizada com fenômeno de birrefringência. Conseqüentemente, o parâmetro que controla a violação de Lorentz é dado como:

$$\xi \approx \frac{2\Delta\theta (M_{\text{P}})^{2z-1}}{d (K_2^{2z} - k_1^{2z})} (R_{\text{HLP}})^{2(z-1)}. \quad (3.2)$$

Agora é possível impor a limite superior para o parâmetro ξ da violação de Lorentz no ponto de Lifshitz. Para isso, foram usadas as determinações recentes da distância do gamma-ray burst *GRB 041219A*, para que um alto grau de polarização seja observado na emissão. Para obter mais informações, veja as detecções derivadas em tempo real pelo *INTEGRAL Burst Alert System (IBIS)* [28, 29, 30].

Os valores medidos que foram usados, são os seguintes: $\Delta\theta(d) = 47^\circ$ para o grau de polarização derivado das medidas feitas ao longo da duração da explosão e $d = 85 \text{ Mpc} = 2,6 \times 10^{26} \text{ cm}$ para o baixo limite de distancia de luminosidade (correspondendo a um redshift de $z_{\text{red}} = 0,02$). Também foi

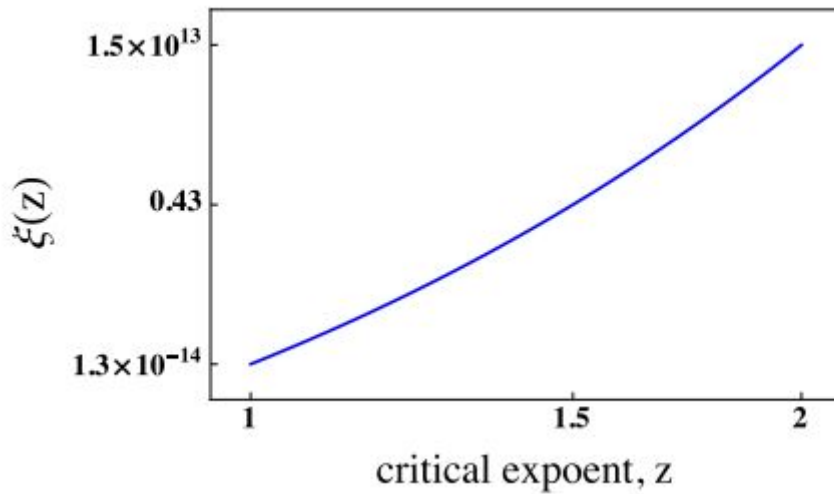
considerado, $L_{Pl} \approx 1,62 \times 10^{-33} cm$ como o comprimento de Planck e $M_p \approx 1,22 \times 10^{19} Gev$ como a energia de Planck tal que seja conveniente, podemos escrever a distancia limite de luminosidade como $d = 85 Mpc = 1,61 \times 10^{59} (M_p)^{-1}$. Logo, sendo possível determinar um limite superior para o efeito da violação de Lorentz como sendo

$$\xi < \frac{1,02 \times 10^{-59} M_p^{2z}}{(k_2^{2z} - k_1^{2z})} (R_{HLP})^{2(z-1)}. \quad (3.3)$$

Neste ponto, nós assumimos os seguintes valores para as energias: $k_1 \sim 100 KeV \sim 1 \times 10^{-4} GeV \sim 0,81 \times 10^{-23} M_p$, $k_2 \sim 350 KeV \sim 3,5 \times 10^{-4} GeV \sim 2,9 \times 10^{-23} M_p$. Assim, como tínhamos assumido que $R_{HLP} \sim 10^{-9}$, a equação acima é escrita como

$$\xi < \frac{1,02 \times 10^{28z-41}}{(2,9^{2z} - 0,81^{2z})}, \quad (3.4)$$

como podemos ver, aqui foi imposto um limite superior para o parâmetro ξ , porém este limite agora passa a ser controlado pelo expoente crítico de lifshitz, definindo-se a partir disso, a dimensão de acordo com o valor atribuído a esse expoente. Para discutir as restrições ocasionados pela violação de Lorentz, foi feito um gráfico, em que a equação acima fica em função do expoente crítico z .



Note que para $z = 1$, foi encontrado $\xi_{z=1} \lesssim 10^{-14}$ recuperando o resultado obtido em [13]. É um limite muito próximo que pode apontar a não existência desses tipos de termos em uma ação que viola a invariância de Lorentz, ou a presença de alguma simetria agindo para retirar essa contribuição desses operadores. Pode-se encontrar mais informações na Ref. [13].

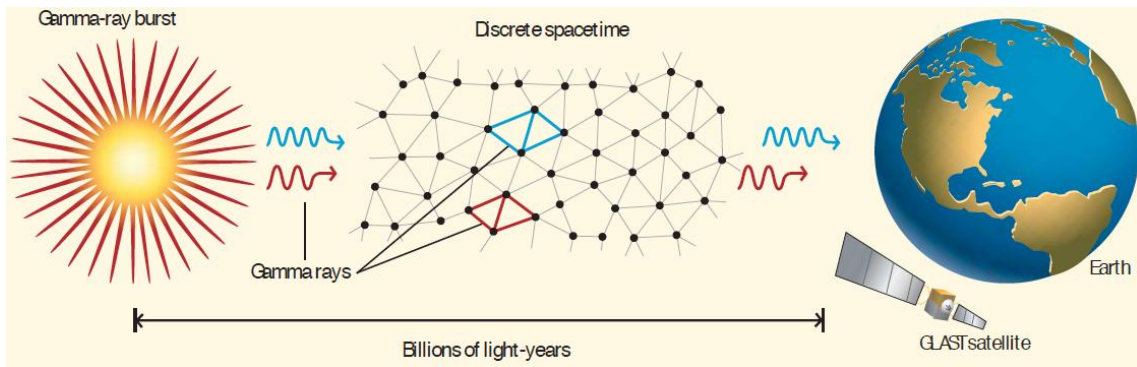
Para um operador dimensão-6, $z = \frac{3}{2}$, encontramos que $\xi_{z=\frac{3}{2}} \lesssim 0,43$. Se o escalonamento Hořava-Lifshitz está ausente, o limite encontrado na referência [13] é $\xi \lesssim 2,61 \times 10^8$, esse limite é muito grande para restringir algum ξ relevante, que é esperado ser próximo das ordens de magnitude, mas também o limite encontrado é quase de ordem um, onde foi esperado encontrar um efeito de quebra de simetria

relevante. Para um $z > \frac{2}{3}$, foi encontrado que os limites não tem alguma restrição realística para o valor ξ desde que $\xi_{z=2} \lesssim 1,5 \times 10^{13}$.

3.3 O Atraso Temporal na Propagação entre Fótons

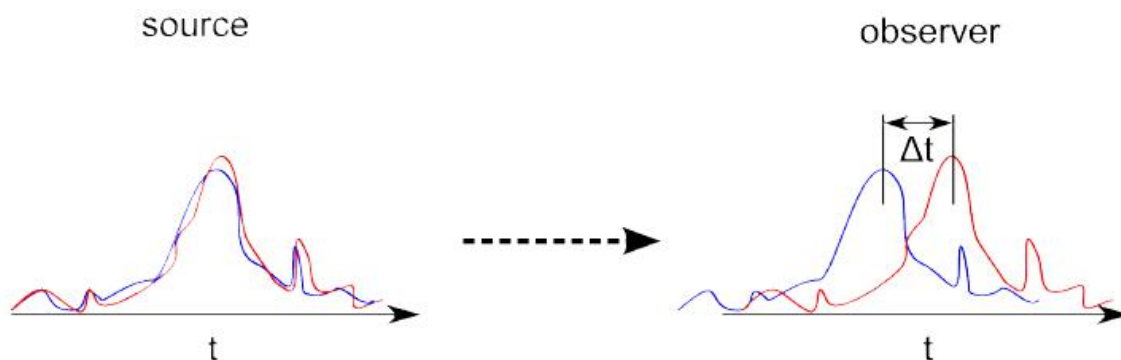
O atraso temporal ocorre quando fótons emitidos de uma mesma fonte, são detectados em tempos diferentes, sendo um fóton mais energético detectado após a chegada do menos energético, acarretando a um pequeno atraso temporal. Isso ocorre porque segundo a teoria da gravidade quântica, o espaço para energias próximas a escala de Planck, deixa de ser contínuo, e passa a ser discretizado, como se houvesse granulações espaciais, como mostra a figura a seguir:

Figura 3.1: Teste experimental para LIV.



Esses fótons podem ser gerados de fontes transientes, que são fontes que dão grandes picos de energia em um curto espaço de tempo, onde esse fóton mais energético acabou percorrendo esse espaço granulado, provocando um atraso temporal na detecção do mesmo como segue na figura abaixo:

Figura 3.2: Propagação dos pulsos eletromagnéticos.



Para este estudo, será usado o resultado obtido na seção 2.3.3 ao qual se refere a velocidade de grupo, mas sem o efeito da birrefringência, tonando-se ideal para calcular o atraso temporal de dois fótons.

3.3.1 Atraso temporal

A partir da Eq. (2.39), a qual se refere a contribuição da LIV na nossa teoria, podemos daí derivar a velocidade de grupo em termos do redshift z_{red} . Por questões de notação, iremos utilizar nesta seção a variável z' e z_{red} para o redshift, já que utilizamos desde o início z para o expoente crítico de Lifshitz. Com isso, a equação em termos do redshift é

$$k(z_{red}) = \pm \left[\omega(1 + z_{red}) + \frac{1}{2} \frac{\beta^{(6)}(R_{HLP})^2}{\Lambda_{HL}^{z+1}} (\omega(1 + z_{red}))^{z+2} \right]. \quad (3.5)$$

Derivando então a Eq. (3.5) com relação a energia E , obtemos assim a expressão

$$\frac{\partial k(z_{red})}{\partial \omega} = (1 + z_{red}) \left[1 + \frac{z + 2}{2} \frac{\beta^{(6)}(R_{HLP})^2}{\Lambda_{HL}^{z+1}} (\omega(1 + z_{red}))^{z+1} \right], \quad (3.6)$$

e assim como foi feito em seções anteriores, a derivada referente a Eq. (3.6) nos dá a velocidade de grupo da forma v_g^{-1} . Com isso podemos fazer uma aproximação de modo que obteremos a velocidade de grupo que é expressa por:

$$v_g(z_{red}) = (1 + z_{red}) \left[1 - \frac{z + 2}{2} \frac{\beta^{(6)}(R_{HLP})^2}{\Lambda_{HL}^{z+1}} (\omega(1 + z_{red}))^{z+1} \right], \quad (3.7)$$

Para determinar o atraso cosmológico causado pela LIV entre as duas partículas, temos que verificar suas distâncias comoveis, tal distância pode ser encontrada através da equação [31]:

$$x(t) = \int_{t_e}^{t_d} v(t) dt = \int_0^z v(z') \frac{dz'}{H(z')(1 + z')}, \quad (3.8)$$

onde t_d e t_e são respectivamente os tempos de detecção e emissão da partícula, o $v(z')$ é na verdade a velocidade de grupo em termos do redshift, dada pela Eq. (3.7) e $H(z)$ aqui denota o fator de expansão do universo, que é chamada de parâmetro de Hubble possuindo a seguinte forma

$$H(z) = H_0^{-1} \sqrt{\Omega_\Lambda + \Omega_m(1 + z)^3}, \quad (3.9)$$

em que H_0 é a constante de Hubble no presente, Ω_Λ é a densidade total de massa do universo, e Ω_m é a densidade de energia escura, normalmente se é encontrado um outro termo neste parâmetro de Hubble, sendo ele $\Omega_k = 0$, pois consideramos uma geometria espacial plana. Reescrevendo agora a distância comovel a partir da Eq. (3.7) e usando a velocidade em função do redshift $v(z)$, temos

$$x(z, \omega) = \int_0^{z_{red}} \left\{ 1 - \frac{z + 2}{2} \frac{\beta^{(6)}(R_{HLP})^2}{\Lambda_{HL}^{z+1}} [\omega(1 + z')]^{z+1} c \right\} \frac{dz'}{H(z')}. \quad (3.10)$$

No primeiro termo percebemos facilmente que é o tempo de voo para fótons na cosmologia relativística padrão, que no caso não há a presença de qualquer termo de quebra de simetria. Logo focaremos nossa

atenção no segundo termo que possui correção da VIL. Assim, a Eq. (3.10) se torna na realidade a expressão que nos dirá o tempo gasto pelo fóton até ser detectado na terra sob ação da VIL:

$$t_{\text{LIV}} = -\frac{c}{H_0} \frac{z+2}{2} \frac{\beta_\gamma^{(6)} (R_{\text{HLP}})^2}{\Lambda_{\text{HL}}^{z+1}} \omega^{z+1} \int_0^{z_{\text{red}}} \frac{(1+z')^{z+1} dz'}{\sqrt{\Omega_\Lambda + \Omega_m (1+z')^3}}. \quad (3.11)$$

Conseqüentemente, o atraso temporal entre um fóton de baixa energia, e outro de alta energia é igual à:

$$\Delta t_{\text{LIV}} = \frac{1}{H_0} \frac{z+2}{2} \frac{\beta_\gamma^{(6)} (R_{\text{HLP}})^2}{\Lambda_{\text{HL}}^{z+1}} (\omega_h^{z+1} - \omega_l^{z+1}) \int_0^{z_{\text{red}}} \frac{(1+z')^{z+1} dz'}{\sqrt{\Omega_\Lambda + \Omega_m (1+z')^3}}. \quad (3.12)$$

Vale ressaltar que a mesma expressão é válida para uma partículas ultra relativista massiva, como um neutrino energético [32], se o termo de correção na relação dispersão devido à massa da partícula é menor do que a correção devido a LIV.

Para determinarmos o valor da constante referente ao termo de Myeras-Pospelov de dimensão-seis $\beta_\gamma^{(6)}$, vamos reescrever a Eq. (3.12) isolando o termo em questão

$$\beta^{(6)} = \Delta t_{\text{LIV}} H_0 \frac{2}{z+2} \frac{\Lambda_{\text{HL}}^{z+1}}{(R_{\text{HLP}})^2} \frac{1}{(\omega_h^{z+1} - \omega_l^{z+1})} \left[\int_0^{z_{\text{red}}} \frac{(1+z')^{z+1} dz'}{\sqrt{\Omega_\Lambda + \Omega_m (1+z')^3}} \right]^{-1}. \quad (3.13)$$

Neste momento faremos a substituição de algumas constantes que já são encontradas na literatura, sendo elas $H_0 = 70 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} = 1.505 \times 10^{-42} \text{ GeV}$, $\Omega_m = 0.315$ e $\Omega_\Lambda = 0.685$. Vamos usar também a razão $R_{\text{HLP}} \sim 10^{-9}$. Para os outros dados, utilizaremos como base os dados encontrados na ref. [33], conforme a tabela Tab. 3.1 onde possui dados de 4 GRBs. Além disso, o expoente crítico z será atribuído o valor conforme a necessidade, então, este será o último dado a ser adicionado.

Tabela 3.1: Tabela retirada da Ref. [34]. Nestes dados é possível encontrar dados para atraso temporal Δt_{LIV} devido a LIV e as escalas de energias observadas em 4 GRBs.

GRB	ω_{low}^0 (MeV)	ω_{high}^0 (GeV)	Δt_{LIV} (s)	z_{red}
080916c	100	13.22	0.24	4.35
090510	100	31	0.14	0.90
090902b	100	11.16	0.10	1.82
090926	100	21.5	0.20	2.11

Algo a ser percebido inicialmente, é que para os valores de energia $\omega_{\text{low}}^0 \ll \omega_{\text{high}}^0$, podendo assim ser desconsiderados por possuir valores irrelevantes. Dessa forma, substituindo os valores das constantes na Eq. (3.13), ela será escrita como

$$\beta^{(6)} \simeq 4.61 \times 10^{-24} \frac{\Delta t_{\text{LIV}}}{(z+2)} \left(\frac{\Lambda_{\text{HL}}}{\omega_h} \right)^{z+1} \left[\int_0^{z_{\text{red}}} \frac{(1+z')^{z+1} dz'}{\sqrt{0.685 + 0.315(1+z')^3}} \right]^{-1}. \quad (3.14)$$

Como foi posto anteriormente, o expoente crítico z define a dimensão em que o operador se encontra. Para os valores de $z = 1$, $z = 2$ e $z = 3$, as dimensões do operador são respectivamente, seis, sete e oito. Para o caso em que $z = 0$ retornamos ao operador de dimensão-cinco.

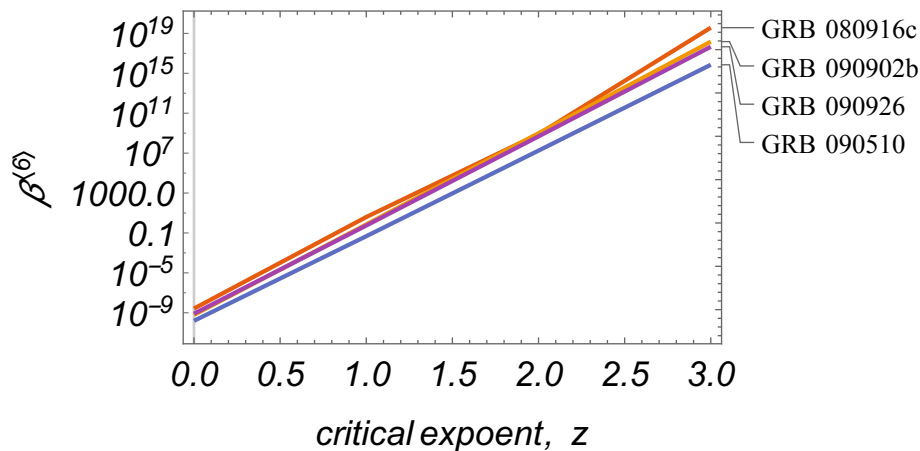
Os valores para cada GRB aplicado Tab. 3.1 na Eq. (3.14), vai nos gerar uma nova tabela em que os valores para $\beta^{(6)}$ estarão em função do expoente crítico z citados anteriormente.

Tabela 3.2: Valores para Eq. (3.14) em função de z

GRB	$z=0$	$z=1$	$z=2$	$z=3$
080916c	2.65×10^{-9}	3.93	8.08×10^9	3.71×10^{19}
090510	1.56×10^{-10}	0.047	1.78×10^7	7.11×10^{15}
090902b	6.18×10^{-10}	0.701	9.65×10^8	1.49×10^{18}
090926	8.06×10^{-10}	0.554	4.73×10^8	4.55×10^{17}

A partir dos dados da tab. 3.2, foi feito um gráfico com os valores de $\beta^{(6)}$ em escala logarítmica pelos valores do expoente crítico, assim linearizando os gráficos para os GRBs.

Figura 3.3: Gráfico para dos GRBs linearizados.



Embora o resultado para $z = 0$, se comparado com a Ref. [24] que foi trabalhado operadores de dimensão-cinco também com escalonamento Hořava-Lifshitz, temos que os valores referentes a ξ que possui um valor bem menor ao encontrado em nosso modelo da ordem de 10^{-4} , ainda assim a contribuição para esses operadores continua sendo muito pequena, e podendo ser atribuído os mesmos argumentos usados para justificar o desaparecimento desses operadores.

Para um operador de dimensão-seis, que em nosso modelo se trata de $z = 1$, os valores estão próximos e equivalentes aos valores para o operador de dimensão-cinco $\xi \leq 0.43$ para $z = \frac{3}{2}$ (que para a teoria caracteriza operadores de dimensão-seis), como já foi mencionado antes. Para o caso em que não temos

o escalonamento de Hořava-Lifshitz, um limite encontrado na Ref. [13] para este tipo de operador é da ordem 10^8 , o que é um valor muito alto para se encontrar algum efeito da LIV, ao contrário do nosso modelo que também se mantém na ordem próxima de 1, que é a ordem esperada para se encontrar algum efeito da LIV. Já para o operador de dimensão-sete $z = 2$, apesar de o valor encontrado ser da ordem de 10^5 menor em nosso modelo se comparado ao da Ref.[24], ainda sim é muito alto como já foi dito. Logo também se trata de um limite não realístico para qualquer efeito causado pela LIV.

O cálculo para o expoente crítico $z = 3$ foi feito apenas para mostrar que não faz mais sentido a escolha de tais valores para z .

Uma última questão a ser percebida, é que comparando os valores com relação às respectivas dimensões de cada modelo, percebemos que para o modelo de dimensão-seis temos uma convergência melhor dos valores para o expoente crítico, que embora não sirvam para uma análise física, para uma análise matemática melhora a variância estatística de nosso modelo.

Conclusão

Neste trabalho, foi estudado um modelo Maxwell para a eletrodinâmica com extensão de altas ordens derivativas que violam a invariância de Lorentz, mais especificamente operadores de Myers-Pospelov de cinco e seis dimensões, onde focamos nas relações de dispersão modificadas para a eletrodinâmica mostrando que para um operador de dimensão-cinco encontramos um efeito da birrefringência do vácuo que é ideal para calcular o grau de polarização de fótons, e para um operador de dimensão-6 como dito na Ref. [35] não há esse efeito, nos dando a possibilidade de cálculo de atraso temporal na viagem de fótons.

Diante desses resultados, foi então feito um estudo do escalonamento de Hořava-Lifshitz para esses operadores, onde tais operadores quebram a simetria através da introdução do expoente crítico z , em que para operadores de dimensão-cinco foi feita uma modificação pelo escalonamento na parte magnética e para o operador de dimensão-seis na parte elétrica, caso último esse que foi desenvolvido no trabalho, e mostrando que mesmo assim a invariância de calibre é preservada para ambos os casos.

Com isso, foi também obtido os limites superiores para o parâmetro para operadores de dimensão-cinco que controla a quebra da invariância de Lorentz em função de vários valores adquiridos pelo expoente crítico de Lifshitz. Estes limites foram determinados usando os resultados observacionais da explosão de raios gama, evento GRB 041219A.

Para os operadores de dimensão-seis, foi feito o mesmo tratamento de análise o qual foi encontrado valores para o parâmetro do operador de dimensão-seis, mas usando neste caso dados fenomenológicos de atraso temporal de quatro outros GRBs, sendo eles 080916c, 090510, 090902b e 090926.

No primeiro caso foi feita a seguinte conclusão, que para $z = 1$ temos a correspondência direta com operadores de dimensão-cinco, encontrando assim os mesmos resultados já obtidos na literatura. E pela natureza ínfima do resultado obtido, concluímos que tais operadores não podem ser usados para descrever os efeitos da quebra da invariância de Lorentz na natureza. Em $z = \frac{3}{2}$, que corresponde a operadores de dimensão-seis, quando comparado com o resultado já existente na literatura sem a escala Horava-Lifshitz, houve um melhora de 8 ordens nos resultados, tornando-o este limite mais próximo da unidade, o que pode ser relevante do ponto de vista fenomenológico. Para operadores de dimensões mais elevadas, ou seja, $z > 3/2$, os resultados obtidos não são capazes de restringir nenhum efeito da violação da invariância

de Lorentz na natureza.

Resultados semelhantes foram obtidos para os operadores de dimensão-seis, que para $z = 0$, podemos encontrar valores referentes aos operadores de dimensão-cinco, que mesmo em nosso modelo havendo uma melhora da ordem de 10^4 no resultado, ainda assim tais operadores não podem ser usados para descrever os efeitos da quebra da invariância de Lorentz. Em $z = 1$, já obtemos uma equivalência a operadores de dimensão-seis, e os resultados obtidos são semelhantes aos do modelo anterior, podendo este limite ser relevante para o estudo da LIV. Para operadores com $z > 1$ é visto que embora também haja uma melhora nas medidas os resultados obtidos também não servem para qualquer medição de efeito da Liv.

A proposta de Myers-Pospelov refere-se também a outros campos, por exemplo, pra os férmions descrito por uma equação de Dirac sobre a influência de operadores de altas ordens derivativos [2]. Para isto, torna-se uma extensão considerável deste trabalho usar o escalonamento de Lifshitz na relação de dispersão modificada resultante para descrever propagações anômalas de neutrinos oriundos de supernovas.

Apêndice A

Equação de Euler-Lagrange de altas Ordens Derivativas

A equação de Euler-Lagrange é de vital importância para se conseguir as equações de movimento, como visto em nosso trabalho. Sabendo disso demonstraremos aqui como chegar nas equações modificadas usadas em todo o trabalho devida a operadores com derivadas superiores. De início será feita a demonstração geral, e após isso o análogo covariante.

Seja a integral tripla

$$J = \iiint F(x_i, u, u_{x_i}, u_{x_i x_j}, u_{x_i x_j x_k}) dx_i dx_j dx_k \quad (\text{A.1})$$

onde $i, j, k = 1, 2, 3$, e F é uma função dada dos argumentos $x_i, u, u_{x_i}, u_{x_i x_j}, u_{x_i x_j x_k}$ e todas funções consideradas por comparação que tem derivadas contínuas consideremos daí uma função arbitrária tal $\eta(x_i)$, tal que $\eta(x_i) = 0$ nos pontos de contorno $a \leq x_i \leq b$.

Consideremos então uma função dada por

$$\bar{u} = u + \epsilon \eta(x) \quad (\text{A.2})$$

tal que o parâmetro ϵ seja suficientemente pequeno, de forma que a integral da igualdade $J[\bar{u}] = J[u + \epsilon \eta]$ seja respeitada. Logo a quantidade $\epsilon \eta = \delta U$, que também é chamada como variação da função $u = f(x_i)$.

Dessa forma consideremos a variação de J tal como

$$J[\bar{u}] = \iiint F(x_i, u + \epsilon \eta, u_{x_i} + \epsilon \eta_{x_i}, u_{x_i x_j} + \epsilon \eta_{x_i x_j}, u_{x_i x_j x_k} + \epsilon \eta_{x_i x_j x_k}) dx_i dx_j dx_k \quad (\text{A.3})$$

derivando com relação a ϵ ,

$$\begin{aligned} \delta J &= \iiint \left[\frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{dx_i}{d\epsilon} + \frac{\partial F}{\partial u} \frac{du}{d\epsilon} + \frac{\partial F}{\partial u_{x_i}} \frac{du_{x_i}}{d\epsilon} + \frac{\partial F}{\partial u_{x_i x_j}} \frac{du_{x_i x_j}}{d\epsilon} + \frac{\partial F}{\partial u_{x_i x_j x_k}} \frac{du_{x_i x_j x_k}}{d\epsilon} \right] dx_i dx_j dx_k \\ &= \iiint \left[\frac{\partial F}{\partial u} \eta + \underbrace{\frac{\partial F}{\partial u_{x_i}} \eta_{x_i}}_* + \underbrace{\frac{\partial F}{\partial u_{x_i x_j}} \eta_{x_i x_j}}_{**} + \underbrace{\frac{\partial F}{\partial u_{x_i x_j x_k}} \eta_{x_i x_j x_k}}_{***} \right] dx_i dx_j dx_k \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

partindo para uma análise de cada termo em separado

$$(*) \frac{\partial F}{\partial u_{x_i}} \eta_{x_i} = \frac{d}{dx_i} \left(\frac{\partial F}{\partial u_{x_i}} \eta \right) - \frac{d}{dx_i} \frac{\partial F}{\partial u_{x_i}} \eta \quad (\text{A.5})$$

$$(**) \frac{\partial F}{\partial u_{x_i x_j}} \eta_{x_i x_j} = \frac{d}{dx_j} \left(\frac{d}{dx_i} \frac{\partial F}{\partial u_{x_i x_j}} \eta \right) - \frac{d^2}{dx_i dx_j} \frac{\partial F}{\partial u_{x_i x_j}} \eta \quad (\text{A.6})$$

$$(***) \frac{\partial F}{\partial u_{x_i x_j x_k}} \eta_{x_i x_j x_k} = \frac{d}{dx_k} \left(\frac{d^2}{dx_i dx_j} \frac{\partial F}{\partial u_{x_i x_j x_k}} \eta \right) - \frac{d^3}{dx_i dx_j dx_k} \frac{\partial F}{\partial u_{x_i x_j x_k}} \eta \quad (\text{A.7})$$

dessa forma, ao substituírmos esses resultados na Eq. (A.4)

$$\begin{aligned} \delta J = \iiint \left[\frac{\partial F}{\partial u} \eta + \frac{d}{dx_i} \left(\frac{\partial F}{\partial u_{x_i}} \eta \right) - \frac{d}{dx_i} \frac{\partial F}{\partial u_{x_i}} \eta - \frac{d}{dx_j} \left(\frac{d}{dx_i} \frac{\partial F}{\partial u_{x_i x_j}} \eta \right) + \frac{d^2}{dx_i dx_j} \frac{\partial F}{\partial u_{x_i x_j}} \eta \right. \\ \left. + \frac{d}{dx_k} \left(\frac{d^2}{dx_i dx_j} \frac{\partial F}{\partial u_{x_i x_j x_k}} \eta \right) - \frac{d^3}{dx_i dx_j dx_k} \frac{\partial F}{\partial u_{x_i x_j x_k}} \eta \right] dx_i dx_j dx_k \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

onde pode ser separada em uma integral maior e outras menores em que se utiliza o teorema de Gauß e reduzindo assim uma dimensão da integral, como vemos a seguir:

$$\begin{aligned} \delta J = \iiint \left\{ \eta \left[\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx_i} \frac{\partial F}{\partial u_{x_i}} + \frac{d^2}{dx_i dx_j} \frac{\partial F}{\partial u_{x_i x_j}} - \frac{d^3}{dx_i dx_j dx_k} \frac{\partial F}{\partial u_{x_i x_j x_k}} \right] \right\} dx_i dx_j dx_k \\ + \iint \frac{\partial F}{\partial u_{x_i}} \eta dx_j dx_k - \iint \frac{d}{dx_i} \frac{\partial F}{\partial u_{x_i x_j}} \eta dx_i dx_k + \iint \frac{d^2}{dx_i dx_j} \frac{\partial F}{\partial u_{x_i x_j x_k}} \eta dx_i dx_j \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

mas nas três últimas integrais, se faz necessário aplicar os limites de integração adequado a cada integração antes feita, de forma que se considerarmos os limites de integração como sendo a, b de acordo com a condição contorno já dita antes, temos $\eta(a) = \eta(b) = 0$, assim restando apenas

$$\delta J = \iiint \left\{ \eta \left[\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx_i} \frac{\partial F}{\partial u_{x_i}} + \frac{d^2}{dx_i dx_j} \frac{\partial F}{\partial u_{x_i x_j}} - \frac{d^3}{dx_i dx_j dx_k} \frac{\partial F}{\partial u_{x_i x_j x_k}} \right] \right\} dx_i dx_j dx_k. \quad (\text{A.10})$$

Como $\delta J = 0$ para qualquer função diferenciável contínua arbitrária η , de forma geral tem-se

$$\delta J = \int \eta(x_i) \varphi(x_i) dx_i = 0 \quad (\text{A.11})$$

e pelo lema fundamental do cálculo das variações [16]

$$\varphi(x_i) = 0 \quad (\text{A.12})$$

então, finalmente chegamos na expressão

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx_i} \frac{\partial F}{\partial u_{x_i}} + \frac{d^2}{dx_i dx_j} \frac{\partial F}{\partial u_{x_i x_j}} - \frac{d^3}{dx_i dx_j dx_k} \frac{\partial F}{\partial u_{x_i x_j x_k}} = 0 \quad (\text{A.13})$$

Esta equação é a chamada equação de Euler para altas ordens derivativas. Para se fazer um análogo com a equação usada no trabalho, basta fazermos algumas considerações, que são elas

$$u \rightarrow A_\theta ; \quad \frac{d}{dx_i} \rightarrow \partial_\mu ; \quad J \rightarrow S ; \quad F \rightarrow L ; \quad u_{x_i x_j x_k} \rightarrow \partial_\mu \partial_\nu \partial_\gamma A_\theta$$

aplicando essa transformação na Eq. (A.13)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\theta} = \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\theta)} - \partial_\nu \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \partial_\mu A_\theta)} + \partial_\gamma \partial_\nu \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\gamma \partial_\nu \partial_\mu A_\theta)}, \quad (\text{A.14})$$

que é a equação que utilizamos para o nosso trabalho.

Este resultado ainda pode ser generalizado para ordem n , de maneira análoga ao que foi feito aqui obtendo a expressão

$$\frac{\partial L}{\partial f_i} + \sum_{j=1}^n \sum_{\mu_1 \leq \dots \leq \mu_j} (-1)^j \partial_{\mu_1 \dots \mu_j}^j \left(\frac{\partial L}{\partial f_i, \mu_i \dots \mu_j} \right) = 0. \quad (\text{A.15})$$

Apêndice B

Modelo de Maxwell-Hořava-Lifshitz

Apresentaremos aqui, algumas ferramentas matemáticas que são utilizadas com frequência na física, e faremos algumas aplicações de forma a obter alguns resultados que foram usado em todo o trabalho, mas omitidos, por não serem o real foco do trabalho. Também apresentamos algumas soluções para mostrar uma analogia entre os modelos utilizados no trabalho, e o modelo usual, ao considerarmos o expoente crítico $z = 1$. E uma forma mais detalhada de como contruir os modelos, e manusea-los de uma maneira mais simples.

B.1 Construção do modelo

Partindo do tensor de Maxwell para a eletrodinâmica classica dado por

$$-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad (\text{B.1})$$

em que podemos reescreve-lo da seguinte forma

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} &= -\frac{1}{4}(F_{0\nu}F^{0\nu} + F_{i\nu}F^{i\nu}) \\ &= -\frac{1}{4}(F_{00}F^{00} + F_{0i}F^{0i} + F_{i0}F^{i0} + F_{ij}F^{ij}) = -\frac{1}{2}F_{0i}F^{0i} - \frac{1}{4}F_{ij}F^{ij}, \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

onde

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad (\text{B.3})$$

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu, \quad (\text{B.4})$$

pórem no escalonamento Hořava-Lifshitz, devemos acrescentar um termo modificando o termo magnetico na Eq. (B.2)

$$F_{ij} \longrightarrow \frac{1}{\Lambda_{\text{HL}}^{z-1}}(-\Delta)^{(z-1)/2}F_{ij}. \quad (\text{B.5})$$

Fazendo agora o reescalonamento com as seguintes transformações

$$\begin{aligned}
\partial_t &\rightarrow \Lambda_{\text{HL}}^{\frac{1}{2}(z-1)} \partial_t, \\
\partial_i &\rightarrow \Lambda_{\text{HL}}^{-\frac{1}{2}(z-1)} \partial_i, \\
A_t &\rightarrow \Lambda_{\text{HL}}^{\frac{1}{2}(z-1)} A_t, \\
A_i &\rightarrow \Lambda_{\text{HL}}^{-\frac{1}{2}(z-1)} A_i.
\end{aligned} \tag{B.6}$$

Assim a Lagrangiana de Maxwell sofre uma mudança, sendo agora denominada por Lagrangeana de Maxwell-Hořava-Lifshitz e descrita por:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_M \longrightarrow \mathcal{L}_{\text{MHL}} &= \frac{1}{2} F_{0i} F^{0i} - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\Lambda_{\text{HL}}^{z-1}} (-\Delta)^{(z-1)/2} F_{ij} \right) \left(\frac{1}{\Lambda_{\text{HL}}^{z-1}} (-\Delta)^{(z-1)/2} F^{ij} \right) \\
&= -\frac{1}{2} F_{0i} F^{0i} - \frac{1}{4} \frac{1}{\Lambda_{\text{HL}}^{2(z-1)}} F_{ij} (-\Delta)^{(z-1)} F^{ij},
\end{aligned} \tag{B.7}$$

e dessa forma chegando a expressão final em forma da ação

$$S_{\text{M,HL}} = -\frac{1}{2} \int dt d^3 \vec{x} \left[F_{0i} F^{0i} + \frac{1}{2\Lambda_{\text{HL}}^{2(z-1)}} F_{ij} (-\Delta)^{z-1} F^{ij} \right]. \tag{B.8}$$

B.2 Equações de Movimento

Através da Eq. (B.8), podemos determinar as equações de movimento utilizando a equação de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} = 0, \tag{B.9}$$

e com isso vamos determinar os campos para A^0 e A^i , que são respectivamente

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_0} - \partial_0 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 A_0)} - \partial_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_j A_0)} = 0, \tag{B.10}$$

para A^0 , e

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_i} - \partial_0 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 A_i)} - \partial_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_j A_i)} = 0, \tag{B.11}$$

para A^i .

Iniciando para o caso A^0 , o único termo que teremos da lagrangeana será o do setor elétrico:

$$\partial_j \frac{\partial}{\partial (\partial_j A_0)} \left(-\frac{1}{2} F_{0i} F^{0i} \right) = 0, \tag{B.12}$$

onde

$$F_{0i} F^{0i} = (\partial_0 A_i - \partial_i A_0)(\partial^0 A^i - \partial^i A^0) = \partial_0 A_i \partial^0 A^i - \partial_0 A_i \partial^i A^0 - \partial_i A_0 \partial^0 A^i + \partial_i A_0 \partial^i A^0, \tag{B.13}$$

dai, aplicando a Eq. (B.13) na Eq. (B.12), temos

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2} \partial_j \left[-\partial_0 A_i g^{ai} g^{b0} \frac{\partial}{\partial(\partial_j A_0)} (\partial_a A_b) - \partial^0 A^i \delta_i^j \delta_0^0 + \partial^i A^0 \delta_i^j \delta_0^0 + \partial_i A_0 g^{ai} g^{b0} \frac{\partial}{\partial(\partial_j A_0)} \partial_a A_b \right] = 0 \\
& -\frac{1}{2} \partial_j [-\partial^b A^a \delta_a^j \delta_b^0 - \partial^0 A^j + \partial^j A^0 + \partial^a A^b \delta_a^j \delta_b^0] = 0 \\
& -\frac{1}{2} \partial_j [-\partial^0 A^j - \partial^0 A^j + \partial^j A^0 + \partial^j A^0] = 0 \\
& -\frac{1}{2} 2\partial_j F^{j0} = 0,
\end{aligned}$$

assim chegando na primeira das equações de movimento

$$\partial_j F^{0j} = 0. \quad (\text{B.14})$$

Percebemos que para o setor elétrico, a equação de movimento não sofre nenhuma alteração pelo escalonamento de Hořava-Lifshitz.

Agora para A^i , aplicada a equação de Euler-Lagrange, temos que ambos os setores teram contribuição no resultado, assim então será dividido em duas partes como pode ser visto abaixo, para uma melhor organização.

$$\underbrace{\partial_0 \frac{\partial}{\partial(\partial_0 A_i)} \left[-\frac{1}{2} F_{0i} F^{0i} \right]}_{(*)} + \underbrace{\partial_j \frac{\partial}{\partial(\partial_j A_i)} \left[-\frac{1}{4} \frac{1}{\Lambda_{\text{HL}}^{2(z-1)}} F_{ab} (-\Delta)^{(z-1)} F^{ab} \right]}_{(**)} = 0, \quad (\text{B.15})$$

da primeira parte que se refere (*), temos

$$\begin{aligned}
\partial_0 \frac{\partial}{\partial(\partial_0 A_i)} \left[-\frac{1}{2} F_{0i} F^{0i} \right] &= -\frac{1}{2} \partial_0 \left[\partial^0 A^i + \partial_0 A_i g^{a0} g^{bi} \frac{\partial}{\partial(\partial_0 A_i)} (\partial_a A_b) - \partial^i A^0 + \partial_i A_0 g^{a0} g^{bi} \frac{\partial}{\partial(\partial_0 A_i)} (\partial_a A_b) \right] \\
&= -\frac{1}{2} \partial_0 \left[F^{0i} + \partial^a A^b \delta_a^0 \delta_b^i - \partial^b A^a \delta_a^0 \delta^i A^b \right] = -\frac{1}{2} \partial_0 (F^{0i} + \partial^0 A^i - \partial^i A^0) \\
&= -\frac{1}{2} \partial_0 2F^{0i} = -\partial_0 F^{0i}, \quad (\text{B.16})
\end{aligned}$$

e para a segunda parte referente a (**), temos

$$\begin{aligned}
\partial_j \frac{\partial}{\partial(\partial_j A_i)} \left[-\frac{1}{4} \frac{1}{\Lambda_{\text{HL}}^{2(z-1)}} F_{ab} (\Delta)^{(z-1)} F^{ab} \right] &= \partial_j \frac{\partial}{\partial(\partial_j A_i)} g^{ac} g^{bd} \left[-\frac{1}{4} \frac{1}{\Lambda_{\text{HL}}^{2(z-1)}} F_{ab} (\Delta)^{(z-1)} F^{cd} \right] \\
&= \partial_j g^{ac} g^{bd} 2F_{cd} (\delta_a^j \delta_b^i - \delta_b^j \delta_a^i) \left[-\frac{1}{4} \frac{1}{\Lambda_{\text{HL}}^{2(z-1)}} (\Delta)^{(z-1)} \right] \\
&= \partial_j 2F^{ab} (\delta_a^j \delta_b^i - \delta_b^j \delta_a^i) \left[-\frac{1}{4} \frac{1}{\Lambda_{\text{HL}}^{2(z-1)}} (\Delta)^{(z-1)} \right] \\
&= \partial_j (F^{ji} - F^{ij}) \left[-\frac{1}{4} \frac{1}{\Lambda_{\text{HL}}^{2(z-1)}} (\Delta)^{(z-1)} \right] \\
&= \partial_j \frac{1}{\Lambda_{\text{HL}}^{2(z-1)}} (-\Delta)^{(z-1)} F^{ij}. \quad (\text{B.17})
\end{aligned}$$

Logo somando ambos os resultados equivalentes a (*) e (**), chegamos à

$$-\partial_0 F^{0i} + \partial_j \frac{1}{\Lambda_{\text{HL}}^{2(z-1)}} (-\Delta)^{(z-1)} F^{ij} = 0. \quad (\text{B.18})$$

Assim as equações de movimento para o modelo em estudo são

$$\partial_j F^{0j} = 0, \quad (\text{B.19})$$

$$-\partial_0 F^{0i} + \partial_j \frac{1}{\Lambda_{\text{HL}}^{2(z-1)}} (-\Delta)^{(z-1)} F^{ij} = 0, \quad (\text{B.20})$$

onde ainda podemos expressar essas equações com relação aos campos elétrico e magnético dadas por

$$F^{0i} = -E^i, \quad (\text{B.21a})$$

$$F^{ij} = -\epsilon^{ijk} B_k, \quad (\text{B.21b})$$

e aplicando (B.21a) e (B.21b) nas Eqs. (B.19) e (B.20) temos

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0, \quad (\text{B.22})$$

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \frac{(-\Delta)^{(z-1)}}{\Lambda_{\text{HL}}^{2(z-1)}} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = 0. \quad (\text{B.23})$$

B.3 O propagador do campo de calibre

A partir da ação dada pela Eq. (B.8) obtida anteriormente, vamos calcular o propagador do fóton, mas para isso precisamos adicionar um termo de fixação de calibre, dado abaixo.

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \partial_\mu A^\nu \partial_\mu A^\nu &= -\frac{1}{2} [(\partial_0 A^0 + \partial_i A^i)(\partial_0 A^0 + \partial_i A^i)] \\ &= -\frac{1}{2} [(\partial_0 A^0)^2 + (\partial_i A^i)^2 + \partial_i A^i \partial_0 A^0], \end{aligned} \quad (\text{B.24})$$

usando os termos que definimos antes temos

$$-\frac{1}{2} (\partial_\mu A^\mu)^2 = -\frac{1}{2} \left[(\partial_0 A^0)^2 + \frac{1}{\Lambda_{\text{HL}}^{2(z-1)}} (-\Delta)^{(z-1)} (\partial_i A^i)^2 + \frac{2}{\Lambda_{\text{HL}}^{(z-1)}} (-\Delta)^{(z-1)/2} \partial_i A^i \partial_0 A^0 \right], \quad (\text{B.25})$$

e somando com a Eq. (B.8), torna-se

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= -\frac{1}{2} \left\{ F_{0i}F^{0i} + (\partial_0 A^0)^2 + \frac{2}{\Lambda_{\text{HL}}^{(z-1)}} (-\Delta)^{(z-1)/2} \partial_i A^i \partial_0 A^0 + \frac{(-\Delta)^{(z-1)}}{\Lambda_{\text{HL}}^{2(z-1)}} [F_{i0}F^{0i} + (\partial_i A^i)^2] \right\} \\
&= -\frac{1}{2} \left\{ (\partial_0 A_i - \partial_i A_0)(\partial^0 A^i - \partial^i A^0) + (\partial_0 A^0)^2 + \frac{2}{\Lambda_{\text{HL}}^{(z-1)}} (-\Delta)^{(z-1)/2} \partial_i A^i \partial_0 A^0 \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2\Lambda_{\text{HL}}^{2(z-1)}} (-\Delta)^{(z-1)} [(\partial_i A_j - \partial_j A_i)(\partial^i A^j - \partial^j A^i) + 2\partial_i A^i \partial_i A^i] \right\} \\
&= -\frac{1}{2} \left\{ \partial_0 A_i \partial^0 A^i - \partial_0 A_i \partial^0 A^i - \partial_0 A_i \partial^i A^0 + \partial_i A^0 \partial^i A^0 + \partial_0 A^0 \partial_0 A^0 + \frac{2(-\Delta)^{(z-1)/2}}{\Lambda_{\text{HL}}^{(z-1)}} \partial_i A^i \partial_0 A^0 \right. \\
&\quad \left. + \frac{(-\Delta)^{(z-1)}}{2\Lambda_{\text{HL}}^{2(z-1)}} [\partial_i A_j \partial^i A^j - \partial_j A_i \partial^i A^j - \partial_i A_j \partial^j A^i + \partial_j A_i \partial^j A^i + 2\partial_i A^i \partial_i A^i] \right\}, \\
\mathcal{L} &= -\frac{1}{2} \left\{ \partial^0 A^i \partial_0 A_i - \partial^0 A_i \partial_0 A^i - \partial_0 A^i \partial_i A^0 + A^0 \partial_i \partial_i A^0 + A^0 \partial_0 \partial_0 A^0 + \frac{2(-\Delta)^{(z-1)/2}}{\Lambda_{\text{HL}}^{(z-1)}} \partial_i A^i \partial_0 A^0 \right. \\
&\quad \left. + \frac{(-\Delta)^{(z-1)}}{2\Lambda_{\text{HL}}^{2(z-1)}} [2\partial_i A_j \partial^i A^j - 2\partial_j A_i \partial^i A^j + 2\partial_i A^i \partial_i A^i] \right\} \\
&= -\frac{1}{2} \left\{ A^i \partial^0 \partial_0 A^j \eta_{ij} - A_i \left(2\partial_0 \partial_i + \frac{2(-\Delta)^{(z-1)/2}}{\Lambda_{\text{HL}}^{(z-1)}} \partial_i \partial_0 \right) A^0 + A^0 (\partial_i \partial_i + \partial_0 \partial_0) A^0 \right. \\
&\quad \left. + \frac{(-\Delta)^{(z-1)}}{\Lambda_{\text{HL}}^{2(z-1)}} [A^i \partial_i \partial^i A^j \eta_{ij} - A^i \partial^i \partial_i A^j \eta_{ij} + A^i \partial_i \partial^i A^j \eta_{ij}] \right\} \\
&= -\frac{1}{2} \left\{ A^i \left\{ \left[\partial_t^2 + \frac{(-\Delta)^{(z-1)}}{\Lambda_{\text{HL}}^{2(z-1)}} \Delta \right] \eta_{ij} \right\} A^j + A^0 (\partial_i \partial_i + \partial_0 \partial_0) A^0 \right. \\
&\quad \left. - 2A_i \left(\partial_0 \partial_i + \frac{(-\Delta)^{(z-1)/2}}{\Lambda_{\text{HL}}^{(z-1)}} \partial_i \partial_0 \right) A^0 \right\}. \tag{B.26}
\end{aligned}$$

Usando a condição de calibre $A^0 = 0$, temos que a ação será

$$S = \frac{1}{2} \int d^4 x A^i \left\{ \left[\partial_t^2 + \frac{(-\Delta)^z}{\Lambda_{\text{HL}}^{2(z-1)}} \right] \eta_{ij} \right\} A^j. \tag{B.27}$$

Agora vamos calcular o propagador, que será dado como

$$\left[\left(\partial_t^2 + \frac{(-\Delta)^z}{\Lambda_{\text{HL}}^{2(z-1)}} \right) \eta_{ij} \right] \Delta_F^{ij}(x-y) = i\delta_j^k \delta^3(x-y). \tag{B.28}$$

Aplicando a transformada de Fourier sobre o propagador

$$\Delta_F^{\mu\nu}(x-y) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \Delta_F^{\mu\nu}(k) e^{ik(x-y)}, \tag{B.29}$$

e aplicando as derivadas, temos

$$\left[\left(\partial_t^2 + \frac{(-\Delta)^z}{\Lambda_{\text{HL}}^{2(z-1)}} \right) \eta_{ij} \right] \Delta^{ij}(x-y) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \Delta_{jl}(k) \left(\partial_t^2 + \frac{(-\Delta)^z}{\Lambda_{\text{HL}}^{2(z-1)}} \right) \eta_{ij} e^{ik(x-y)}, \tag{B.30}$$

escrevendo agora a Eq. (referenciar acima) no espaço dos momentos temos

$$e^{-ikx} = e^{-ik_0x^0 - ik_ix^i} = e^{-i\omega t - i\vec{k}\vec{x}},$$

logo derivando chegamos em

$$\left[\left(\partial_t^2 + \frac{(-\Delta)^z}{\Lambda_{\text{HL}}^{2(z-1)}} \right) \eta_{ij} \right] \Delta^{ij}(x-y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \Delta_{jl}(k) \left\{ -\omega^2 - (-i)(-i) \frac{(\vec{k}\vec{k})^z}{\Lambda_{\text{HL}}^{2(z-1)}} \right\} \eta_{ij} e^{ik(x-y)}, \quad (\text{B.31})$$

consequentemente precisamos da igualdade seja valida

$$\left[-\omega^2 + \frac{k^{2z}}{\Lambda_{\text{HL}}^{2(z-1)}} \right] \eta_{ij} \Delta_F^{jk}(k) = i\delta_i^k, \quad (\text{B.32})$$

onde, chamamos

$$\Delta_F^{-1}{}_{ij} = \left[-\omega^2 + \frac{k^{2z}}{\Lambda_{\text{HL}}^{2(z-1)}} \right] \eta_{ij}, \quad (\text{B.33})$$

daí temos a relação

$$(\Delta_F^{-1})_{ij}(k) (\Delta_F)^{jk}(k) = i\delta_i^k, \quad (\text{B.34})$$

e assim podendo usar o seguinte Ansatz

$$(\Delta_F)^{jk}(k) = A\eta^{jk}, \quad (\text{B.35})$$

e consequentemente

$$\begin{aligned} \left[-\omega^2 + \frac{k^{2z}}{\Lambda_{\text{HL}}^{2(z-1)}} \right] \eta_{ij} A \eta^{jk} &= i\delta_i^k \Rightarrow \left[-\omega^2 + \frac{k^{2z}}{\Lambda_{\text{HL}}^{2(z-1)}} \right] A \delta_i^k = i\delta_i^k, \\ A &= \frac{i}{\omega^2 - \Lambda_{\text{HL}}^{2(z-1)} k^{2z}}. \end{aligned} \quad (\text{B.36})$$

Logo

$$(\Delta)^{jk}(k) = -\frac{i\eta^{jk}}{\omega^2 - \Lambda_{\text{HL}}^{2(z-1)} k^{2z}}. \quad (\text{B.37})$$

B.4 Modos de Propagação de Ondas

Os modos de propagação das ondas eletromagnéticas, tais como as frequências e as velocidades de grupo, são usualmente obtidos através da relação de dispersão das ondas. Tal quantidade pode ser diretamente obtida pelo denominador do propagador de Feynman associado, quando submetido a uma equação de auto-valores. Informalmente, temos

$$\omega^2 - \Lambda_{\text{HL}}^{-(z-1)} k^{2z} = 0, \quad (\text{B.38})$$

daí temos que

$$\omega_\lambda = \frac{\lambda k^z}{\Lambda_{\text{HL}}^{(z-1)}}, \quad (\text{B.39})$$

onde $\lambda = \pm$ e a velocidade de grupo é dada pela derivada de ω em relação à k , assim

$$v_{g\lambda} = \frac{d\omega_\lambda}{dk} = z\lambda \frac{k^{z-1}}{\Lambda_{\text{HL}}^{(z-1)}} = z\lambda \left(\frac{k}{\Lambda_{\text{HL}}} \right)^{z-1}. \quad (\text{B.40})$$

Apêndice C

Segundo Modelo de Maxwell-Hořava-Lifshitz

Nesta seção será mostrado toda a construção em conjunto com algumas aplicações para o modelo usado na seção 2.3.

C.1 Construção do modelo

Vamos agora reconstruir a teoria anterior, mas com foco no outro termo do Tensor $f_{\mu\nu}$, ou seja

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -\frac{1}{4}(F_{0\nu}F^{0\nu} + F_{i\nu}F^{i\nu}) = -\frac{1}{2}F_{0i}F^{0i} - \frac{1}{4}F_{ij}F^{ij}, \quad (\text{C.1})$$

e vamos modificar o primeiro termo tipo Hořava-Lifshitz, escrevendo como

$$\mathcal{S}_{\text{M,HL}}^{(2)} = -\frac{1}{2} \int dt d^3x \left[F_{0i} (i\partial_t)^{2(z-1)} F^{0i} + \frac{1}{2} F_{ij} F^{ij} \right]. \quad (\text{C.2})$$

Mas para isso, precisamos rescrever o reescalamento de tal forma que conserve a adimensionalidade da ação. Para isso consideremos que $[t] = [L]^Z$ e $[\vec{x}] = [L]$, e vamos precisar de 3 condições básicas para estabelecer a teoria, e são elas

- Para $z = 1$, voltar para a teoria de Maxwell,
- $[F_{ij}] = [L]^{-\frac{1}{2}(3z+1)}$ para que o segundo termo permaneça adimensional,
- $[F_{0i}] = [L]^{-\frac{1}{2}(z+3)}$ para termos o termo de Hořava-Lifshitz equilibrando a dimensão da ação.

Assim, considerando que $[\partial_i] = [L]^{-z}$, temos

$$\begin{aligned} [F_{ij}] &= [\partial_i][A_j] - [\partial_j][A_i] = [L]^{-\frac{1}{2}(3z+1)} \\ &= [L]^{-z}[L]^x = [L]^{-\frac{1}{2}(3z+1)} \Rightarrow x = -\frac{1}{2}(z+1), \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

$$\begin{aligned}
[F_{0i}] &= [\partial_0][A_i] - [\partial_i][A_0] = [L]^{-\frac{1}{2}(z+3)} \\
&= [L]^y [L]^{\frac{1}{2}(z-3)} + [L]^{-z} [L]^w = [L]^{-\frac{1}{2}(z+3)},
\end{aligned} \tag{C.4}$$

$$\begin{cases} y + \frac{z+1}{2} = & \Rightarrow & y = -1 \\ -z + w = -\frac{z+3}{2} & \Rightarrow & w = \frac{z-3}{2}. \end{cases}$$

Consequentemente as dimensões são

$$\begin{aligned}
[\partial_0] &= [L]^{-1}, \\
[A_i] &= [L]^{-\frac{1}{2}(z+1)}, \\
[\partial_i] &= [L]^{-z}, \\
[A_0] &= [L]^{\frac{1}{2}(z-3)}.
\end{aligned} \tag{C.5}$$

E para $z = 1$ recuperamos a teoria de Maxwell. A partir daí, podemos definir nossos termos para o novo reescalonamento, sendo esses termos os seguintes

$$\begin{aligned}
A_i &\rightarrow \Lambda_{\text{HL}}^{\frac{1}{2}(z-1)} A_i, \\
\partial_i &\rightarrow \Lambda_{\text{HL}}^{(z-1)} \partial_i, \\
A_0 &\rightarrow \Lambda_{\text{HL}}^{-\frac{1}{2}(z-1)} A_0, \\
\vec{x} &\rightarrow \Lambda_{\text{HL}}^{-(z-1)} \vec{x},
\end{aligned}$$

como

$$\begin{aligned}
F_{0i} &\rightarrow \Lambda_{\text{HL}}^{-\frac{1}{2}(z-1)} F_{0i}, \\
F_{ij} &\rightarrow \Lambda_{\text{HL}}^{\frac{3}{2}(z-1)} F_{ij},
\end{aligned}$$

assim chegando na nossa ação que é dada por:

$$S_{M,HL}^{(2)} = -\frac{1}{2} \int dt d^3 \vec{x} \left[\frac{1}{\Lambda_{\text{HL}}^{2(z-1)}} F_{0i} (i\partial_t)^{2(z-1)} F^{0i} + \frac{1}{2} F_{ij} F^{ij} \right]. \tag{C.6}$$

C.2 Equações de Movimento para o segundo Tipo de Reescalamento

A partir de nossa Lagrangeana obtida através do novo reescalamento, podemos determinar as equações de movimento, utilizando a equação

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} = 0, \quad (\text{C.7})$$

que é conhecida como equação de Euler-Lagrange. Com isso vamos determinar os campos para A^0 e A^i , assim escrevendo as equações como

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_0} - \partial_0 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 A_0)} - \partial_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_j A_0)} = 0, \quad (\text{C.8})$$

para A^0 , e

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_i} - \partial_0 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 A_i)} - \partial_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_j A_i)} = 0, \quad (\text{C.9})$$

para A^i .

Do qual chegamos as seguintes equações de movimento para o modelo em estudo

$$\frac{1}{\Lambda_{\text{HL}}^{2(z-1)}} (i\partial_t)^{2(z-1)} \partial_j F^{0j} = 0, \quad (\text{C.10})$$

$$-\frac{1}{\Lambda_{\text{HL}}^{2(z-1)}} (i\partial_t)^{2(z-1)} \partial_0 F^{0i} + \partial_j F^{ij} = 0, \quad (\text{C.11})$$

onde ainda podemos expressar essas equações em termos do campo elétrico e magnético dadas por

$$F^{0i} = -E^i, \quad (\text{C.12})$$

$$F^{ij} = -\epsilon^{ijk} B_k, \quad (\text{C.13})$$

ou seja

$$\frac{1}{\Lambda_{\text{HL}}^{2(z-1)}} (i\partial_t)^{2(z-1)} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0, \quad (\text{C.14})$$

$$\frac{1}{\Lambda_{\text{HL}}^{2(z-1)}} (i\partial_t)^{2(z-1)} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = 0. \quad (\text{C.15})$$

Podemos perceber facilmente que, para o caso em que $z = 1$ retornamos as equações da teoria usual.

C.3 Invariância de Calibre para o Modelo 2

A partir da ação obtida para o segundo modelo do tipo Hořava-Lifshitz

$$S_{\text{M,HL}}^{(2)} = -\frac{1}{2} \int dt d^3 \vec{x} \left[\frac{1}{\Lambda_{\text{HL}}^{2(z-1)}} F_{0i} (i\partial_t)^{2(z-1)} F^{0i} + \frac{1}{2} F_{ij} F^{ij} \right], \quad (\text{C.16})$$

vamos verificar a invariância de calibre do modelo, de maneira similar a gravidade de Lifshitz usando o formalismo de Arnowitt-Deser-Misner. Então, consideramos a seguinte decomposição dos campos: A_0 e $A_i = A_i^T + \partial_i \varphi$, e com isso, podemos rescrever os tensores como:

$$\begin{aligned} \int d^4 x F_{0i} (i\partial_0)^{2(z-1)} F^{0i} &= \int d^4 x \left[-A_i^T (i\partial)^{2z} \eta^{ij} A_j^T + (A_0 + \varphi) (i\partial_0)^{2(z-1)} \partial_i \partial^i (A_0 + \varphi) \right] \\ \int d^4 x F_{ij} F^{ij} &= \int d^4 x \left[-2A_i^T \partial_i \partial^i \eta^{ij} A_j^T \right]. \end{aligned}$$

Em que substituindo na ação inicial, obtemos

$$S_{\text{M,HL}}^{(2)} = \frac{1}{2} \int dt d^3 \vec{x} \left\{ A_i^T \left[\frac{1}{\Lambda_{\text{HL}}^{2(z-1)}} (i\partial)^{2z} + \partial_i \partial^i \right] \eta^{ij} A_j^T + (A_0 + \varphi) (i\partial_0)^{2(z-1)} \partial_i \partial^i (A_0 + \varphi) \right\}. \quad (\text{C.17})$$

Referências Bibliográficas

- [1] S. Liberati, “Tests of lorentz invariance: a 2013 update,” *Classical and Quantum Gravity*, vol. 30, no. 13, p. 133001, 2013.
- [2] R. C. Myers and M. Pospelov, “Ultraviolet modifications of dispersion relations in effective field theory,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 90, p. 211601, 2003.
- [3] P. A. Bolokhov and M. Pospelov, “Classification of dimension 5 Lorentz violating interactions in the standard model,” *Phys. Rev.*, vol. D77, p. 025022, 2008.
- [4] D. Colladay and V. A. Kostelecký, “Lorentz-violating extension of the standard model,” *Phys. Rev. D*, vol. 58, p. 116002, Oct 1998.
- [5] C. M. Reyes, “Causality and stability for Lorentz-CPT violating electrodynamics with dimension-5 operators,” *Phys. Rev.*, vol. D82, p. 125036, 2010.
- [6] P. Horava, “Quantum Criticality and Yang-Mills Gauge Theory,” *Phys. Lett.*, vol. B694, pp. 172–176, 2011.
- [7] M. Visser, “Lorentz symmetry breaking as a quantum field theory regulator,” *Physical Review D*, vol. 80, no. 2, p. 025011, 2009.
- [8] M. Pospelov and Y. Shang, “Lorentz violation in hořava-lifshitz-type theories,” *Phys. Rev. D*, vol. 85, p. 105001, May 2012.
- [9] R. J. Gleiser and C. N. Kozameh, “Astrophysical limits on quantum gravity motivated birefringence,” *Phys. Rev.*, vol. D64, p. 083007, 2001.
- [10] W. Coburn and S. E. Boggs, “Polarization of the prompt gamma-ray emission from the gamma-ray burst of 6 december 2002,” *Nature*, vol. 423, pp. 415–417, 2003.
- [11] T. A. Jacobson, S. Liberati, D. Mattingly, and F. W. Stecker, “New limits on Planck scale Lorentz violation in QED,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 93, p. 021101, 2004.

- [12] D. Götz, S. Covino, R. Hascoët, A. Fernandez-Soto, F. Daigne, R. Mochkovitch, and P. Esposito, “A detailed spectral study of grb 041219a and its host galaxy,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 413, no. 3, pp. 2173–2183, 2011.
- [13] P. Laurent, D. Gotz, P. Binetruy, S. Covino, and A. Fernandez-Soto, “Constraints on Lorentz Invariance Violation using INTEGRAL/IBIS observations of GRB041219A,” *Phys. Rev.*, vol. D83, p. 121301, 2011.
- [14] D. Götz, S. Covino, A. Fernández-Soto, P. Laurent, and Ž. Bošnjak, “The polarized gamma-ray burst grb 061122,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 431, no. 4, pp. 3550–3556, 2013.
- [15] S. Elitzur, “Impossibility of spontaneously breaking local symmetries,” *Phys. Rev. D*, vol. 12, pp. 3978–3982, Dec 1975.
- [16] H. Courant, *Methods of Mathematical Physics*, vol. vol 1. Wiley-VCH, 1966.
- [17] D. J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*. Prentice Hall, 3rd ed ed., 1999.
- [18] V. A. Kostelecký and M. Mewes, “Electrodynamics with lorentz-violating operators of arbitrary dimension,” *Phys. Rev. D*, vol. 80, p. 015020, Jul 2009.
- [19] W. Greiner, *Classical electrodynamics*. Springer, 1998.
- [20] M. W. McCall, A. Lakhtakia, and W. S. Weiglhofer, “The negative index of refraction demystified,” *European Journal of Physics*, vol. 23, no. 3, p. 353, 2002.
- [21] W. Rudin *et al.*, *Principles of mathematical analysis*, vol. 3. McGraw-hill New York, 1964.
- [22] P. Horava, “Quantum Gravity at a Lifshitz Point,” *Phys. Rev.*, vol. D79, p. 084008, 2009.
- [23] R. L. Arnowitt, S. Deser, and C. W. Misner, “The Dynamics of general relativity,” *Gen. Rel. Grav.*, vol. 40, pp. 1997–2027, 2008.
- [24] E. Passos, E. M. C. Abreu, M. A. Anacleto, F. A. Brito, C. Wotzasek, and C. A. D. Zarro, “Lifshitz scaling to Lorentz-violating high derivative operator and gamma-ray bursts,” *Phys. Rev.*, vol. D93, no. 8, p. 085022, 2016.
- [25] M. Pospelov and C. Tamarit, “Lifshitz-sector mediated SUSY breaking,” *JHEP*, vol. 01, p. 048, 2014.
- [26] P. Meszaros, “Theories of gamma-ray bursts,” *Ann. Rev. Astron. Astrophys.*, vol. 40, pp. 137–169, 2002.
- [27] E. Troja, V. Lipunov, C. Mundell, N. Butler, A. Watson, S. Kobayashi, S. Cenko, F. Marshall, R. Ricci, A. Fruchter, *et al.*, “Significant and variable linear polarization during the prompt optical flash of grb 160625b.,” *Nature*, vol. 547, no. 7664, p. 425, 2017.

- [28] S. Mereghetti, D. Götz, J. Borkowski, R. Walter, and H. Pedersen, "The integral burst alert system," *Astronomy & Astrophysics*, vol. 411, no. 1, pp. L291–L297, 2003.
- [29] C. Winkler, T.-L. Courvoisier, G. Di Cocco, N. Gehrels, A. Giménez, S. Grebenev, W. Hermsen, J. Mas-Hesse, F. Lebrun, N. Lund, *et al.*, "The integral mission," *Astronomy & Astrophysics*, vol. 411, no. 1, pp. L1–L6, 2003.
- [30] G. Vianello, D. Götz, and S. Mereghetti, "The updated spectral catalogue of integral gamma-ray bursts," *Astronomy & Astrophysics*, vol. 495, no. 3, pp. 1005–1032, 2009.
- [31] M. Rodriguez Martinez and T. Piran, "Constraining Lorentz violations with gamma-ray bursts," *JCAP*, vol. 0604, p. 006, 2006.
- [32] U. Jacob and T. Piran, "Neutrinos from gamma-ray bursts as a tool to explore quantum-gravity-induced Lorentz violation," *Nature Phys.*, vol. 3, pp. 87–90, 2007.
- [33] Z. Chang and S. Wang, "Lorentz invariance violation and electromagnetic field in an intrinsically anisotropic spacetime," *Eur. Phys. J.*, vol. C72, p. 2165, 2012.
- [34] Z. Chang, Y. Jiang, and H.-N. Lin, "A unified constraint on the lorentz invariance violation from both short and long {GRBs}," *Astroparticle Physics*, vol. 36, no. 1, pp. 47 – 50, 2012.
- [35] S. Liberati and L. Maccione, "Lorentz Violation: Motivation and new constraints," *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.*, vol. 59, pp. 245–267, 2009.