



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE  
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA  
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA  
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA  
**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

**Buraco Negro BTZ em Teoria de Campos  
não-Comutativa**

**Hebertt Leandro Silva**

CAMPINA GRANDE

- Fevereiro 2017 -

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE  
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA  
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA  
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

**Buraco Negro BTZ em Teoria de Campos  
não-Comutativa**

**Hebertt Leandro Silva**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Campina Grande, como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre em Física.

Área de Concentração: Teoria de Campos e Relatividade Geral.

Orientador: Prof. Dr. Francisco de Assis de Brito.

CAMPINA GRANDE

- Fevereiro de 2017 -

S586b Silva, Hebertt Leandro.  
Buraco negro BTZ em teoria de campos não-comutativa / Hebertt  
Leandro Silva. – Campina Grande, 2018.  
50 f. : il. color.

Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Federal de  
Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2018.  
"Orientação: Prof. Dr. Francisco de Assis de Brito".  
Referências.

1. Buraco Negro – BTZ. 2. Teoria de Campos. 3. Relatividade Geral.  
4. Fator de Corpo Cinza. 5. Seiberg-Witten. I. Brito, Francisco de Assis  
de. II. Título.

CDU 524.882(043)

BURACO NEGRO BTZ EM TEORIA DE CAMPOS  
NÃO-COMUTATIVA

HEBERTT LEANDRO SILVA

Aprovada em \_\_\_\_\_

BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Dr. Francisco de Assis de Brito  
Orientador

---

Prof. Dr. Marcos Antonio Anacleto  
Examinador

---

Prof. Dr. Jean Paulo Spinelly da Silva(UEPB)  
Examinador

Eu poderia viver recluso numa casca de noz e me  
considerar rei do espaço infinito?

William Shakespeare

# Agradecimentos

Ao meu orientador, Prof. Dr. Francisco de Assis de Brito, por toda sua paciência e conhecimento transmitido ao longo desses dois anos. Sem ele este trabalho não seria possível.

À minha família, em especial meus pais Lenivaldo Leandro e Maria de Fátima e minhas duas irmãs Janylle e Jullie, por todo o apoio nos momentos difíceis.

À Maria Danieli, por toda sua paciência, companheirismo, amor e afeto ao longo desses dois anos. Este trabalho é seu também, te amo nega!!

Aos amigos que fiz na Unidade Acadêmica de Física, em especial Klecio Lima, Gilvan Bonfim, João Paulo Souza, João Paulo Gois, Aline Lins, Stephane Judith entre outros dessa longa parceria.

Aos professores do PPG-Física UFCG, em especial, João Santos, Victor Afonso, Marcos Anacleto e Francisco Brito pelas ótimas aulas ministradas.

Aos meus amigos de longa data em Petrolina, Kleiton Teles, Thalyson Alexandre, Jemmerson Barros e Andson Kelvin, por proporcionar ótimas risadas nos momentos livre.

A Miguel Lourenço Neto, pelos ótimos conselhos sobre a vida de pós-graduação.

A todos aqueles que diretamente ou indiretamente contribuíram para este trabalho.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

# Lista de Figuras

2.1	Representação de uma ergosfera do buraco negro . . . . .	16
4.1	Gráfico $V(r)$ : $M = 1; m = 1; l = 4; \mu = 0.1; e = 0.1; B_z = 0.5; \tilde{\theta} = -1$ (azul); $\tilde{\theta} = -1.5$ (rosa); $\tilde{\theta} = -2$ (amarelo) . . . . .	39
4.2	Plot expressão(4.51): $l = 1.5; M = 1; e = 0.6; B_z = 0.5; b = -1.3; \tilde{\theta} = -1$ (azul); $\tilde{\theta} = 1.5$ (amarelo); $\tilde{\theta} = -2$ (rosa) . . . . .	43

# Resumo

Neste trabalho usamos a Lagrangeana do modelo Higgs Abeliano em termos dos campos não-comutativos e através do mapa de Seiberg-Witten expandimos os campos em termos dos comutativos, derivamos as equações de movimento referente a este modelo operando via método variacional. Trabalhamos com este modelo usando o buraco negro BTZ não-comutativo e obtemos assim as equações de movimento, onde foi feita uma substituição de coordenadas afim de simplificar a equação. Estudamos o processo de espalhamento trabalhando com uma equação do tipo Schrödinger, no qual tomamos um caso específico, escolhemos aqui trabalhar valendo-se do caso da métrica BTZ do caso não-comutativo e sem rotação. Calculamos o fator de corpo cinza para este caso onde obtemos uma dependência com a frequência angular  $\omega$ .

Palavras chave: Buraco Negro BTZ, Seiberg-Witten, fator de corpo cinza.



# Abstract

In this work we use the Lagrangian of the Higgs Abelian model in terms of the non-commutative fields and through the Seiberg-Witten map we expand the fields in terms of the commutative ones, we derive the equations of motion referring to this model operating through a variational method. We work with this model using the non-commutative BTZ black hole and thus obtain the equations of motion, where a coordinate substitution was made in order to simplify the equation. We study the scattering process working with a Schrödinger-type equation, in which we take a specific case, we chose to work here using the BTZ metric of the non-commutative and non-rotating case. We calculate the grey body factor for this case where we obtain a dependence with the angular frequency  $\omega$ .

Key words: Black Hole BTZ, Seiberg-Witten, grey body factor

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Noções de Relatividade Geral</b>	<b>4</b>
2.1	Equações de campo da Relatividade Geral . . . . .	6
2.2	Solução de Schwarzschild . . . . .	8
2.3	Outras soluções tipo Buraco Negro . . . . .	10
2.3.1	Solução de Reissner-Nordström . . . . .	11
2.3.2	Solução de Kerr . . . . .	13
2.4	Buraco Negro BTZ . . . . .	16
2.5	Termodinâmica de Buracos Negros . . . . .	17
<b>3</b>	<b>Não-comutatividade</b>	<b>21</b>
3.1	Noções de Álgebra não-comutativa . . . . .	23
3.1.1	Operadores de Weyl . . . . .	23
3.1.2	Produto Estrela . . . . .	25
3.2	Teoria de Gauge . . . . .	26
3.3	Mapa de Seiberg-Witten . . . . .	27
<b>4</b>	<b>Espalhamento</b>	<b>29</b>
4.1	Modelo de Higgs Abeliano . . . . .	29
4.2	Métrica BTZ Não-Comutativa . . . . .	31
4.3	Equações de Movimento . . . . .	32
4.4	Fator de corpo cinza . . . . .	37
<b>5</b>	<b>Considerações Finais</b>	<b>44</b>
<b>A</b>	<b>Cálculo Tensorial</b>	<b>45</b>



# Capítulo 1

## Introdução

A primeira idéia de buraco negro foi introduzida por John Mitchell, o qual propôs de que existiria uma estrela tão compacta de gravidade tão intensa que nem mesmo a luz escaparia. Isto foi proposto usando argumentos da gravitação newtoniana. Porém, com o advento da Relatividade Geral, proposta por Einstein, a idéia física de tal objeto ganhou um rigor a mais. Em 1916, Karl Schwarzschild[1] resolveu para um corpo simetricamente esférico e região estática as equações de campo da Relatividade Geral e, assim, obteve uma solução com uma singularidade em  $r = 0$  cercada por um região delimitada por uma distância denominado raio de Schwarzschild. No limite desta região, ou seja,  $0 < r < r_h$  a atividade gravitacional é tão intensa que o princípio causal deixa de ser válido.

Com o avanço da astronomia foi descoberto que estrelas no fim de suas vidas, com uma massa inicial aproximadamente à três massas solares(ou maior)[2], poderiam, ao colapsarem, atingir o raio de Schwarzschild, e desta forma surgiria um buraco negro. Porém, se analisarmos, existe uma dificuldade para se detectar tal coisa, pois qualquer raio de luz lançado na direção de tal objeto[3] não retornaria para um observador externo de tal maneira que não poderia ser observado. Deveria haver algum modo de se detectar e isso ocorreu devido ao avanço na área de astronomia de raios X[4], no qual descobriram-se anomalias em que poderiam ser causadas por buracos negros em alta rotação.

Foi o Roger Penrose que deu um grande avanço nos trabalhos sobre algumas propriedades de buracos negros. Em uma destas, Penrose propôs que dado condições iniciais para um determinado projétil, de tal maneira que quando lançado próximo à um buraco negro em rotação, se dividisse em duas partes, onde uma cairia e a outra parte escaparia com energia cinética maior(com perda de rotação), este mecanismo é conhecido

como superradiância. E anos mais tarde o Stephen Hawking propôs outra propriedade interessante conhecida como radiação Hawking[5], e em paralelo com Berkenstein, derivaram propriedades termodinâmicas como temperatura e entropia associadas a tal objeto gravitacional.

A radiação Hawking, foi a primeira evidência teórica de uma tentativa de quantizar a gravidade, o mesmo considerou efeitos quânticos próximo ao horizonte de eventos. Em paralelo a outras tentativas de quantizar a gravidade, como teoria das supercordas e "Loop Quantum Gravity"[6], no qual se propõe que essas teorias são baseadas em álgebra não-comutativa. Seguindo este raciocínio os buracos negros não-comutativos surgem como consequências destas teorias na tentativa de estudar a não-comutatividade[7] relacionados a tal objeto fazendo comparações com o caso clássico.

Em 1947, Snyder iniciou os trabalhos para tentar quantizar o espaço-tempo no intuito de reparar as divergências na Eletrodinâmica Quântica nas faixas do ultravioleta e infra-vermelho[8]. Para isto usou-se uma álgebra não-comutativa em que devemos ter uma relação mais geral de comutação do que os operadores  $\hat{x}$  e  $\hat{p}$  na Mecânica Quântica.

Em diferentes modelos na Física surge uma estrutura não-comutativa, como por exemplo no problema nos níveis de Landau, em teorias de quantização da gravidade, na teoria de Yang-Mills, entre outros exemplos[9]. Na teoria de Yang-Mills, por exemplo, o campo que depende das coordenadas, e as coordenadas não-comutam entre si, deste modo o produto usual entre dois campos é alterado, conhecido como produto Weyl-Moyal. Porém existe uma relação para se trabalhar proposta por Seiberg e Witten em que se pode escrever os campos não-ordinários(não-comutativos), em termos dos campos ordinários(comutativos) através de uma transformação conhecida por mapa de Seiberg-Witten[10].

Neste trabalho faremos o seguinte. No capítulo 2, faremos uma revisão sobre Relatividade Geral bem como apresentaremos algumas soluções tipo buraco negro, no qual uma em especial que será o objeto deste trabalho a métrica BTZ e mostraremos algumas relações importantes na Termodinâmica de buracos negros. No capítulo 3, faremos uma revisão sobre não-comutatividade, mostrando alguns pontos importantes e apresentando modelos no qual se trabalha com isto, bem como mostraremos o mapa de Seiberg-Witten. No capítulo 4, que é o objeto principal do trabalho, usamos a versão não-comutativa do modelo de Higgs Abelian e através do mapa de Seiberg-Witten reescrevemos a langran-

geana em termos dos campos comutativos. Feito isto, obtemos as equações de Euler-Lagrange para este modelo usando a métrica BTZ não-comutativa juntamente com um "ansatz" tipo onda plana, obtemos uma equação do tipo Schrödinger no intuito de identificar o potencial do modelo estudado. Neste mesmo capítulo estudamos sobre o processo de espalhamento, onde calculamos o fator de corpo cinza para a métrica BTZ, porém numa teoria de campos não-comutativa, no qual apresentamos alguns resultados novos. E por fim algumas considerações finais. Vamos usar aqui o sistema de unidades naturais  $c = G = \hbar = 1$ .

# Capítulo 2

## Noções de Relatividade Geral

A Relatividade Restrita possui dois postulados [11] que são de fundamental importância para a Física. O primeiro nos enuncia que todas as Leis da Física são válidas em referenciais inerciais, visto que este enunciado estende o princípio de Galileu de que apenas as Leis da Mecânica são validas nesses referenciais. O postulado 02 nos diz que existe uma velocidade limite na natureza e constante que seria a velocidade da luz  $c$ .

E unindo esses dois enunciados, citados no parágrafo acima, temos consequências importantes. Uma delas é que, devido a invariância da luz em relação a qualquer referencial inercial, as transformações galileanas não são mais válidas, sendo assim introduzido as transformações de Lorentz [12] que, por sua vez, nos remete a algo que até então era imutável na teoria newtoniana, o tempo. De acordo com as transformações de Lorentz, tomados dois referenciais  $S$  e  $S'$  (com  $S'$  em movimento uniforme em relação  $S$ ), quando medimos os intervalos temporais  $\Delta t$  e  $\Delta t'$  nestes dois referenciais existe uma diferença de tempo observada.

A Relatividade Geral é sustentada por dois princípios básicos, o Princípio da Equivalência e o Princípio da Covariância Geral. Iremos fazer uma breve discussão sobre os dois, no intuito de entender os fundamentos da Relatividade Geral.

Vamos imaginar um experimento mental citado em boa parte dos livros de introdução à Relatividade Geral[12, 13, 14]. Consideremos dois observadores, o observador A e o observador B. O observador B, está preso dentro de um elevador totalmente isolado do mundo externo enquanto que o observador A através de um mecanismo consegue observar tudo que o observador B faz dentro do elevador, apresentamos a análise de duas situações. A primeira situação seria colocar o elevador na superfície de um planeta, a Terra

por exemplo. Qualquer experimento que o observador B realizar dentro do elevador, como soltar uma pedra ou dar um pequeno salto, o observador B vai concluir estar próximo à superfície de um planeta ou um campo gravitacional. Na segunda situação, ao invés do elevador estar parado em relação ao observador A, o elevador é puxado para cima com uma força constante provocando assim uma aceleração constante de valor  $g$ , livre de qualquer ação externa e localmente. O observador B realizará, então, os mesmos experimentos da primeira situação, vai obter os mesmos resultados e, possivelmente, concluir estar próximo à um campo gravitacional. Porém, para o observador A vai visualizar que o observador B se encontra num referencial não-inercial.

Para a situação descrita, podemos concluir que para o observador B não poderia diferir se encontra num referencial não-inercial ou em um campo gravitacional. Em síntese este é o enunciado do Princípio da Equivalência da Relatividade Geral[14], ou seja, usando esta comparação podemos obter uma lei generalizada da Relatividade válida para todos os referenciais sejam eles inerciais ou não.

Para obter uma teoria relativística da gravidade, devemos levar em conta o movimento relativo de um referencial para outro seja ele inercial ou não. Voltemos ao caso do elevador, tomando a segunda situação, consideremos agora que os dois observadores possuem equipamentos para medir distâncias e que, no referencial do elevador, se encontra uma régua de comprimento  $L$ . O observador B que está em repouso em relação a régua irá medir o comprimento e encontrar o valor  $L$ , porém o observador A que está parado(ou em movimento uniforme) em relação ao elevador irá medir um comprimento diferente daquele encontrado pelo observador B. Como o elevador está em movimento em relação a A, o comprimento  $L$ , medido pelo observador, será contraído por um fator de lorentz. Logo para obter uma lei generalizada da gravitação, devemos considerar as mudanças dos diferentes tipos de sistemas de coordenadas e para um observador local um referencial acelerado equivale à um campo gravitacional, então para o observador A medir algum evento no referencial de B, já que a régua de comprimento  $L$  é proporcional ao fator de lorentz e então a forma como medimos distância muda, ou seja, o espaço no qual trabalhamos que é euclidiano(válida na teoria newtoniana) já não é mais válido.

Um fato interessante do campo gravitacional é que ele acopla com tudo, usando de um observador próximo à um campo gravitacional não temos ferramenta possível de modo que isolem este qualquer da ação do campo. Uma proposta que teve assim um



”insight” para a fundamentação da teoria[13], foi de que a gravidade seria uma manifestação do próprio espaço-tempo quadridimensional, no qual a fonte seria a quantidade de matéria presente.

No intuito de obter esta lei relativística da gravidade devemos considerar todos os referenciais sejam eles inerciais ou não. Para considerar movimentos mais gerais a representação vetorial já não é suficiente, pois estamos considerando o movimento em espaços curvos, então o arcabouço matemático para sustentar esta teoria deve ser representado por objetos matemáticos mais gerais como os tensores[2], as equações de campo de Einstein devem ser representadas por equações tensoriais. E para considerar uma teoria mais geral que leve em conta todos os referenciais, um outro princípio básico da Relatividade Geral que é o Princípio da Covariância Geral, onde estende o enunciado da Relatividade Restrita, este princípio diz que as Leis da Física são válidas em todos os referenciais sejam eles inerciais ou não.

## 2.1 Equações de campo da Relatividade Geral

Vimos na seção anterior, que a gravitação deve ser reformulada para considerar os referenciais acelerados. A forma como medimos distâncias de um referencial para outro muda, considerando que o observador se encontre num referencial acelerado. Foi discutido também que a geometria euclidiana já não é mais válido se queremos generalizar a Relatividade Restrita. Sabemos que num espaço livre de qualquer interação de campo gravitacional[2] recorremos ao elemento de linha de Minkowski em coordenadas cartesianas para o espaço plano:

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad (2.1)$$

ou numa forma geral, para qualquer espaço seja ele plano ou curvo[15], podemos escrever da seguinte forma:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (2.2)$$

onde o  $g_{\mu\nu}$  é o tensor métrico e os índices  $\mu$  e  $\nu$  estão somados (convenção de Einstein). O tensor métrico na forma geral em  $(3 + 1)$  dimensões pode ser escrito da seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{30} & g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix}$$

O elemento de linha  $ds^2$  foi construído de forma que permanecesse a invariância para qualquer que seja o referencial  $d\bar{s}^2 = ds^2$ , ou seja, os intervalos espaço-temporais são invariantes de Lorentz.

O tensor métrico é a quantidade mais fundamental das equações de Einstein[14], a partir dele definimos outras quantidades tensoriais (ver Apêndice). Devemos encontrar agora uma equação que represente a teoria, analogamente ao caso de uma carga  $q$  como fonte de campo elétrico, temos para o caso da gravitação a massa-energia ( $E = mc^2$ ) como fonte do campo gravitacional. Temos duas quantidades as quais teremos que relacionar, geometria e matéria-energia. Um fato pairava na cabeça do Einstein[2], as equações tipo Poisson dadas por:

$$\nabla^2\Phi = 4\pi\rho \tag{2.3}$$

esta equação relaciona o potencial gravitacional (ou outro qualquer dependendo da teoria), e a densidade de matéria. Para obter uma equação mais geral, já que estamos trabalhando com espaços curvos podemos simplesmente generalizar a equação (2.3) da seguinte forma[2]:

$$\nabla^2 g_{\mu\nu} \propto kT_{\mu\nu} \tag{2.4}$$

onde o potencial gravitacional seria substituído pelo tensor métrico fundamental, e agora ao invés de termos uma densidade de matéria  $\rho$ , teremos um objeto  $T_{\mu\nu}$  mais geral intitulado de tensor energia-momento. De um lado da equação temos um termo que envolve a geometria, derivada segunda do  $g_{\mu\nu}$ , e do outro temos um termo que envolve toda a quantidade de matéria-energia presente. Porém não podemos simplesmente generalizar a expressão (2.4) devido a divergências que surge na teoria[2]. Em síntese, as equações de campo deduzidas analogamente, um lado envolve derivadas segundas do  $g_{\mu\nu}$  (e derivadas primeiras) apenas foram redefinidos através de outros tensores como o tensor de Riemann (ver Apêndice), em síntese as equações de campo da Relatividade Geral são da

seguinte forma[14]

$$G_{\mu\nu} = kT_{\mu\nu} \quad (2.5)$$

onde  $k = 8\pi$  é uma constante e o  $G_{\mu\nu}$  é denominado de tensor de Einstein e definido da seguinte forma:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \quad (2.6)$$

em que  $R_{\mu\nu}$  é o tensor de Ricci e  $R$  é o escalar de curvatura.

Vamos analisar a equação (2.5), ela pode nos dar quantidades físicas importantes, uma das formas seria de impor condições iniciais à determinada geometria, ou seja, impor condições sobre o  $G_{\mu\nu}$  e obter assim a distribuição de matéria associado ao  $T_{\mu\nu}$ . Ou fazer o processo inverso, impondo condições de contorno sobre o  $T_{\mu\nu}$  e obter informações sobre determinada geometria.

O conjunto de equações de campo, nos levam à problemas extremamente longos e complicados de se resolver, porque para cada  $\mu$  e  $\nu$  ( $\mu$  e  $\nu$  variam de 0 à 3) diferentes na equação (2.5) temos um sistema de equações diferenciais, e outra informação não tão agradável é que as equações de campo não são lineares, ou seja, o princípio da superposição não é mais válido. E vale ressaltar que a Relatividade Geral veio para englobar as outras teorias, ela é uma teoria relativística da gravidade no qual ao realizar qualquer experimento local recorreremos ao espaço plano.

## 2.2 Solução de Schwarzschild

No final da seção anterior, comentamos de como seria difícil e complicado obter uma solução das equações de campo da Relatividade Geral, porém em 1916[4] Karl Schwarzschild publica a primeira solução exata dessas equações.

Schwarzschild propõe condições para determinada geometria. Ele fez o seguinte: tomou as equações de campo no vácuo (distante da fonte), que o  $g_{\mu\nu}$  fosse estacionário e possuísse uma simetria esférica. Este elemento de linha na forma canônica é dado por[14]

$$ds^2 = e^{\nu(t,r)} dt^2 - e^{\lambda(t,r)} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\varphi^2. \quad (2.7)$$

As exponenciais são funções de  $t$  e  $r$ . Ao calcular todas as componentes do tensor de Einstein (ver pág: 363 da referência [14] problema 6.31) e resolvendo o sistema de equações diferenciais que aparece encontramos os valores da exponencial em termos de uma

constante  $c'$ , o elemento de linha fica da seguinte forma:

$$ds^2 = \left(1 + \frac{c'}{r}\right) dt^2 - \left(1 + \frac{c'}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \text{sen}^2 \theta d\varphi^2$$

Para encontrar o valor da constante  $c'$ , basta tomarmos o limite. No limite newtoniano, uma massa  $M$  pontual na origem, gera um potencial  $\Phi = \frac{GM}{r}$ , então no limite de campo fraco[2]:

$$g_{00} \simeq 1 + 2\Phi \simeq 1 - \frac{2m}{r}$$

Comparando com a componente temporal do tensor métrico, obtemos:

$$c' = -2m.$$

Logo, ficamos com:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \text{sen}^2 \theta d\varphi^2 \quad (2.8)$$

o resultado acima é conhecido como elemento de linha de Schwarzschild.

Vamos analisar o comportamento da métrica de Schwarzschild, tomando os casos limites para os valores de  $r$ .

Para  $r = 2m$ :

$$g_{tt} \rightarrow 0; g_{rr} \rightarrow \infty$$

A coordenada temporal deixa de existir, enquanto que há uma divergência para o infinito da coordenada radial, existe uma região de infinito "redshift"(deslocamento para o vermelho)[4], ou seja, para um observador externo visto de fora dessa região qualquer raio de luz lançado nesse limite não retornaria.

Para  $r < 2m$ :

$$g_{tt} < 0; g_{rr} > 0$$

Para este caso, ocorre outros dois problemas. As coordenadas "t" e "r" trocam de papel[2], para o limite dentro dessa região o princípio causal deixa de ser válido. Nesta região as leis da Física não são mais válidas.

Para  $r = 0$ :

$$g_{tt} \rightarrow \infty; g_{rr} \rightarrow 0$$

Temos uma singularidade temporal em um único ponto definido por  $r = 0$ .

A singularidade do  $g_{rr}$  pode ser removida através de uma mudança de coordenadas[14], enquanto que a singularidade temporal em  $g_{tt}$  não pode ser removida fazendo qualquer processo matemático.

Para a região  $0 < r < 2m$  onde a causalidade não é mais válida, foi definido para o valor limite ( $r = 2m$ ) como raio de Schwarzschild[4]. Esta região denomina-se horizonte de eventos, pois nenhum evento pode ser medido no espaço-tempo. Não se sabe ao certo o que acontece à um objeto que cai no horizonte de eventos e em seguida cai na singularidade temporal definida por  $r = 0$ , porque o observador externo não observa nada nesta região. Anos mais tarde este objeto de intenso campo gravitacional recebeu o nome de buraco negro[4], pois ele pareceria negro visto por um observador externo.

Outro fato importante desta solução é que ela é assintoticamente plana, que significa que ao tomarmos o limite longe da fonte com  $r \rightarrow \infty$ , o elemento de linha de Schwarzschild torna-se(mudando as coordenadas para coordenadas cartesianas) o elemento de linha de Minkowski(espaço plano), dada por:

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

Outra forma de analisar se existe singularidades na solução, é calculando o seguinte invariante(escalar) definido por[2]:

$$R_{\mu\nu\lambda\rho}R^{\mu\nu\lambda\rho} \quad (2.9)$$

no caso de Schwarzschild temos:

$$R_{\mu\nu\lambda\rho}R^{\mu\nu\lambda\rho} = \frac{48m^2}{r^6} \quad (2.10)$$

notemos que a singularidade em  $r = 2m$  foi removida,ou seja, para o caso  $r = 2m$  o invariante escalar definido pela expressão (2.9) não diverge, no entanto a singularidade em  $r = 0$  permanece.

## 2.3 Outras soluções tipo Buraco Negro

Vimos na seção anterior uma solução das equações de Einstein, considerando o caso mais simples possível. Nesta seção iremos adicionar mais duas quantidades físicas importantes, carga e rotação. Adiantemos que vamos discutir nesta seção duas soluções, a solução de Reissner-Nordström(Buraco Negro carregado) e a solução de Kerr(Buraco Negro girante).

### 2.3.1 Solução de Reissner-Nordström

A solução de Reissner-Nordström é bastante similar a solução de Schwarzschild, diferindo que para esta solução temos um corpo carregado[2]. Então para este caso o lado direito das equações de Einstein não é mais nulo, ou seja,

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} \quad (2.11)$$

onde  $T_{\mu\nu}$  é o tensor energia-momento de Maxwell[14], dado por:

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left( -g^{\lambda\rho} F_{\mu\rho} F_{\nu\lambda} + \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\lambda\rho} F^{\lambda\rho} \right) \quad (2.12)$$

Combinando as equações (2.11) e (2.12), obtemos:

$$G_{\mu\nu} = -2g^{\lambda\rho} F_{\mu\lambda} F_{\nu\rho} + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} F_{\lambda\rho} F^{\lambda\rho} \quad (2.13)$$

a expressão acima é as equações de campo da Relatividade Geral na presença de fontes eletromagnéticas. Nos fornece assim a geometria gerada por um corpo de massa M carregado. As relações de vínculo<sup>1</sup> que o tensor de Maxwell  $F_{\mu\nu}$  deve obedecer[14] são as seguintes:

$$\nabla_\nu F^{\mu\nu} = 0; \partial_\mu F_{\nu\lambda} = 0 \quad (2.14)$$

estas condições são os vínculos para as equações de Maxwell livre de fontes. Assumindo novamente simetria esférica, onde o elemento de linha na forma canônica é dado por:

$$ds^2 = e^\nu dt^2 - e^\lambda dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (2.15)$$

e a próxima condição é de que a solução seja estática(Teorema de Portkoff), ou seja

$$\nu = \nu(r); \lambda = \lambda(r)$$

Considerando que o campo elétrico tenha coordenada puramente radial(caso estático sem campo magnético) o tensor de Maxwell deve tomar a seguinte forma:

$$F_{\mu\nu} = E(r) \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

---

<sup>1</sup>São restrições impostas ao movimento. No caso em questão ao eletromagnetismo livre de fontes

Usando as equações (2.14) e (2.16), encontramos a seguinte relação:

$$E = \frac{e^{\frac{1}{2}\nu+\lambda}\epsilon}{r^2} \quad (2.17)$$

onde  $\epsilon$  é uma constante. Devemos encontrar a expressão para as exponenciais, notemos que o elemento de linha (2.15) é o mesmo para o caso de Schwazrschild. Vamos calcular as componentes da equação (2.13), tanto o lado que envolve a geometria o  $G_{\mu\nu}$  (problema 6.31 da referência [14]) como o lado do tensor energia-momento  $T_{\mu\nu}$ . Fazendo isso para as componentes  $G_{00}$  e  $G_{11}$  retornamos à um sistema de equações diferenciais similar calculado para o caso de Schwazrschild [14], obtemos:

$$\lambda = -\nu \quad (2.18)$$

Logo a relação (2.17), torna-se:

$$E = \frac{\epsilon}{r^2} \quad (2.19)$$

Calculando a componente  $G_{22}$ , comparando com o lado do tensor  $T_{\mu\nu}$  da expressão (2.13) e resolvendo o sistema de equações, obtemos o seguinte valor para a exponencial:

$$e^\nu = c'' - \frac{c'}{r} + \frac{\epsilon^2}{r^2}$$

tomando o limite de campo fraco encontramos que  $c'' = 1$  e  $c' = 2m$ . Então o elemento de linha fica da forma,

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{\epsilon^2}{r^2}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{\epsilon^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2) \quad (2.20)$$

Note que ao tomarmos o limite de  $\epsilon \rightarrow 0$ , retornamos ao caso de Schwarzschild. E a constante  $\epsilon$  é identificada ao fecharmos uma gaussiana em volta da região como sendo a carga  $q$  do corpo de massa  $M$ .

Similarmente ao caso de Schwarzschild, vamos analisar as regiões de infinito *redshift*, ou seja, quando  $g_{tt} \rightarrow 0$  e conseqüentemente  $g_{rr} \rightarrow \infty$ . Vamos fazer a seguinte definição, chamando de  $\frac{Q}{r^2}$  onde  $Q = r^2 - 2mr + \epsilon^2$ , iremos calcular as raízes dessa quantidade  $Q$ [14]. Calculando o discriminante de  $Q$  (equação de 2° grau para  $r$ ):

$$\Delta = 4(m^2 - \epsilon^2)$$

e calculando as raízes

$$r_{\pm} = \frac{2m \pm \sqrt{\Delta}}{2}$$

$$r_{\pm} = m \pm \sqrt{m^2 - \epsilon^2} \quad (2.21)$$

Vamos tomar aqui o caso para  $\epsilon^2 > m^2$ . Os outros dois casos para  $\epsilon^2 < m^2$  e  $\epsilon^2 = m^2$  podem ser vistos na referência [2]. Então para este caso[14], o buraco negro carregado possui três regiões:

$$I - r_+ < r < \infty$$

$$II - r_- < r < r_+$$

$$III - 0 < r < r_-$$

Para o caso desta solução temos dois horizontes de eventos , um horizonte externo em  $r_+$  é um horizonte interno denominado horizonte de Cauchy. Então, para as regiões I e III, as coordenadas  $t$  e  $r$  trocam de papel, enquanto que são conectadas através da região II. Novamente, podemos remover a singularidade de  $g_{rr}$  em  $r_+$  e  $r_-$  fazendo uma mudança de coordenadas[14] e, em  $r = 0$ , a singularidade permanece de modo que podemos identificar a carga localizada nesse ponto. E se traçarmos uma gaussiana verificamos que a carga se encontra exatamente no centro, ou seja, ao tomarmos a simetria esférica necessariamente tem que ser estático[2]. E, como no caso de Schwarzschild, a solução também é assintoticamente plana  $g_{\mu\nu} \rightarrow \eta_{\mu\nu}$  quando  $r \rightarrow \infty$ .

### 2.3.2 Solução de Kerr

Nesta seção consideraremos agora o caso de uma variedade 4-dimensional sob a perspectiva de uma dinâmica de rotação e ,novamente, analisar as singularidades e horizontes, e identificar algumas grandezas físicas como o momento angular. Ao contrário das soluções de Schwarzschild e Reissner-Nordström, que vieram logo após as equações de Einstein, a solução de Kerr veio bem depois, apenas em 1963[2]. Esta solução é extremamente complicada de se obter. Portanto vamos fazer apenas a análise do elemento de linha:

$$ds^2 = \frac{\Delta}{\rho^2} (dt - a \operatorname{sen}^2 \theta d\varphi)^2 - \frac{\operatorname{sen}^2 \theta}{\rho^2} ((r^2 + a^2) d\varphi - a dt)^2 - \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 - \rho^2 d\theta^2 \quad (2.22)$$

onde  $\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$  e  $\Delta = r^2 - 2mr + a^2$ . Este elemento de linha é dado nas coordenadas de Boyer-Lindquist. Existe outras formas de se escrever este elemento [14], nesta forma fica mais fácil a análise.



Fazendo a análise da expressão (2.22), ao tomarmos  $a = 0$  recuperamos o elemento de linha de Schwarzschild, quantidade  $a$  está diretamente relacionada com o momento angular da seguinte forma,  $a = \frac{J}{M}$  onde  $J$  é o momento angular e  $M$  a massa. Neste elemento de linha surge termos cruzados  $dt d\varphi$  que indica rotação, no qual a expressão (2.22) é invariante perante a dupla transformação[14]:

$$t \rightarrow -t; \varphi \rightarrow -\varphi$$

$$t \rightarrow -t; a \rightarrow -a$$

ou seja, não muda sua forma. A solução possui uma simetria de rotação, tomando o limite de campo fraco a solução de Kerr representa o campo de uma fonte girante[2]. Iremos analisar se a solução é assintótica, pois  $r$  não é a coordenada radial habitual. Para isso devemos considerar a seguinte relação[14]:

$$R^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

e fazer a substituição,

$$x = r \operatorname{sen}\theta \cos\varphi + a \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi$$

$$y = r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi - a \operatorname{sen}\theta \cos\varphi$$

$$z = r \cos\theta$$

de modo que:

$$R^2 = r^2 + a^2 \operatorname{sen}^2\theta \quad (2.23)$$

e tomando o limite de  $r \gg a$ , ou seja, que a distância seja muito grande comparada ao raio de giração<sup>2</sup> do objeto,

$$R = r + \frac{a^2 \operatorname{sen}^2\theta}{2r}$$

onde  $R = r$  no limite  $a = 0$  (distante do campo girante), então  $g_{\mu\nu} \rightarrow \eta_{\mu\nu}$  quando  $R \rightarrow \infty$  na expressão (2.22) e assim a solução de Kerr também é assintoticamente plana. Iremos calcular a região dos valores para os quais o  $g_{tt} = 0$  e  $g_{rr} \rightarrow \infty$  (regiões de infinito *redshift*).

Da expressão (2.22), encontramos:

$$g_{tt} = \frac{r^2 - 2mr + a^2 \cos^2\theta}{\rho^2}$$

---

<sup>2</sup>No cálculo de momento de inércia o raio de giração tem dependência com o momento de inércia e a superfície do objeto.

logo para que se anule a expressão acima basta que,

$$r^2 - 2mr + a^2 \cos^2 \theta = 0$$

calculando as raízes

$$r_{s\pm} = m \pm \sqrt{m^2 - a^2 \cos^2 \theta} \quad (2.24)$$

do mesmo modo para o  $g_{rr}$ ,

$$\Delta = r^2 - 2mr + a^2 = 0$$

obtemos,

$$r_{\pm} = m \pm \sqrt{m^2 - a^2}. \quad (2.25)$$

Analisando a expressão (2.24), vemos que a solução possui duas regiões de infinito *redshift* no qual tomando  $\theta$  diferente de zero não coincide com a região de horizonte em (2.25). Em  $\theta = 0$  a solução possui uma assimetria axial[14], onde as duas expressões se igualam. E ainda a solução possui três regiões regulares para o caso  $m^2 > a^2$  semelhante ao caso de Reissner-Nordström:

$$I - r_+ < r < \infty$$

$$II - r_- < r < r_+$$

$$III - 0 < r < r_-$$

E, novamente, ao tomarmos o limite de  $a \rightarrow 0$ , retornamos ao caso de Schwarzschild, onde a superfície de infinito *redshift* coincide com a região do horizonte. Na região de  $\theta$  diferente de zero, temos uma superfície de arraste<sup>3</sup> denominada ergosfera[2], algo novo que não tinha aparecido ainda na teoria newtoniana. E a singularidade da solução será dada quando  $g_{tt} \rightarrow 0$ , logo:

$$\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta = 0$$

o único modo de anular  $\rho$  é fazendo  $r = 0, \cos \theta = 0$ [14] e  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , então da expressão (2.23) temos:

$$R^2 = r^2 + a^2 \sin^2 \theta$$

$$R^2 = a^2$$

---

<sup>3</sup>Devido a rotação do espaço-tempo surge uma superfície em que um observador é literalmente arrastado.

ou ainda

$$x^2 + y^2 = a^2 \quad (2.26)$$

para o caso da solução de Kerr, temos uma anel de singularidade. E tomando  $a = 0$ , o anel



Figura 2.1: Representação de uma ergosfera do buraco negro

de singularidade volta a ser um ponto. Nesta solução surge algo importante, temos agora uma ergoesfera que é definida como sendo a região no limite entre o último horizonte e a última região de infinito *redshift*. Propriedades interessantes podem ser estudadas nessa região[4]. Iremos discutir algumas delas numa seção mais adiante.

## 2.4 Buraco Negro BTZ

Nas seções anteriores, trabalhamos com soluções tipo buraco negro sempre em 3+1 dimensões (3 dimensões espaciais e 1 temporal). Nesta seção iremos tratar de um tipo em 2+1 dimensões, a sigla BTZ se deve ao nome de seus autores [16] proposta inicialmente em 1992.

Vamos aqui apresentar esta solução e discutir algumas características importantes. A solução do Buraco Negro BTZ trata de um corpo de massa  $M$ , momento angular  $J$  e com constante cosmológica  $\Lambda$  [2, 15]. A métrica de assinatura  $(-, +, +)$  com essas condições é dada por[16]:

$$ds^2 = -N^2(r)dt^2 + N^{-2}dr^2 + r^2(N^\phi(r)dt + d\phi)^2 \quad (2.27)$$

onde  $N^2(r) = -M + \frac{r^2}{l^2} + \frac{J^2}{4r^2}$  e  $N^\phi = -\frac{J}{2r^2}$ . E a constante  $l$  está relacionado com a constante cosmológica  $-\Lambda = l^{-2}$ .

As duas constantes  $M$  e  $J$  surgem devido a invariâncias no espaço-tempo, a massa devido à temporal e o momento angular devido à rotacional. Analisando as regiões onde

$g_{tt} \rightarrow 0$  e  $g_{rr} \rightarrow \infty$ , os valores de  $r$  são:

$$r_{\pm} = l \left( \frac{M}{2} \left[ 1 \pm \left[ 1 - \left( \frac{J}{Ml} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right] \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.28)$$

Notemos que, para que exista um horizonte da expressão (2.28) temos que restringir certos valores nos parâmetros  $M$  e  $J$ . Logo, a solução em  $r_+$ , deve satisfazer as seguintes condições:

$$M > 0; |J| \leq Ml$$

Pois para o caso extremo  $|J| = Ml$  ambos os valores de  $r$  em (2.28) coincidem e para este caso em particular na métrica deixa de existir um horizonte de eventos. Vejamos que a solução não é assintoticamente plana pois fazendo  $r \rightarrow \infty$  não recuperamos o elemento de linha de Minkowski. Então para tomar a solução de vácuo, livre de qualquer ação devemos fazer duas considerações  $M \rightarrow 0$  no qual requer  $J \rightarrow 0$ , logo o elemento de linha (2.27) torna-se:

$$ds_{vac}^2 = - \left( \frac{r}{l} \right)^2 dt^2 + \left( \frac{r}{l} \right)^{-2} dr^2 + r^2 d\phi^2 \quad (2.29)$$

Na expressão (2.29), devido ao fator da constante cosmológica, o elemento de linha não é assintoticamente plano, ou seja, não recuperamos Minkowski ao tomarmos o limite. Ainda analisando (2.29), em  $r = 0$  temos uma de singularidade nua<sup>4</sup>[2] o que fisicamente é impossível pois estaria violando o princípio da censura cósmica<sup>5</sup>[17]. Um outro caso especial puramente matemático(massa negativa não seria possível) pode ser tomado para (2.27) com  $M = -1$  e  $J = 0$ , ficando com:

$$ds^2 = - \left( 1 + \left( \frac{r}{l} \right)^2 \right) dt^2 + \left( 1 + \left( \frac{r}{l} \right)^2 \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\phi^2 \quad (2.30)$$

a singularidade em  $r = 0$  desaparece e não há um horizonte. E novamente para esta configuração a solução não é assintoticamente plana.

## 2.5 Termodinâmica de Buracos Negros

Objetos de uma notória estranheza, os buracos negros surgem como soluções das equações de campo da Relatividade Geral. Porém, o status de objeto apenas teórico

---

<sup>4</sup>A singularidade de um Buraco Negro é "coberta" pelo horizonte de eventos. Dizemos que a singularidade é nua quando apresenta-se uma solução que não possui um horizonte de eventos.

<sup>5</sup>O princípio nos diz que: não podemos obter informações de uma região do espaço(ponto) onde viola as Leis da Física.

foi mudando em meados de 1960[4].Este estudo teve início ao analisar a evolução de estrelas[18] e ver que dependendo de um certo valor de massa crítica  $M \sim 3M_{\odot}$ (massa solar)[2] estrelas ao colapsarem deveriam alcançar o raio de Schwarzschild e assim se tornariam um buraco negro.

Mas como detectar objetos astronômicos como esses, se qualquer raio de luz lançado na direção do Buraco Negro não retornaria e ,assim, não poderia ser visto por um observador. Logo o status mal tinha mudado e não haveria possibilidade de se detectar tal objeto. Porém, com os trabalhos de R. Giacconi e outros da astronomia de raio X[4] encontraram anomalias em especial em Cygnus X-3. Que fontes de raio X poderiam ser na verdade buracos negros com discos de acréscimo, a alta rotação de um buraco negro em sistemas de estrelas binárias(duas estrelas em que uma se torna um buraco negro) causaria um superaquecimento de toda radiação e emitiria assim um surto na faixa dos raios X.Esta emissão na faixa de raio X tem uma característica em especial, onde não é emitido de forma contínua e sim, com uma defasagem de tempo entre um pico e outro.

Um processo que Penrose imaginou teoricamente de que uma civilização avançada poderia extrair energia[20] de um buraco negro em rotação. Este processo consiste em fazer uso da ergoesfera, este limite[4] seria uma região de arraste do espaço-tempo como um redemoinho que gira junto com o Buraco Negro. Usando condições suficientes de uma partícula que caísse nessa região tal que ao chegar num certo ponto da ergoesfera decaísse em duas, no qual uma cairia no horizonte enquanto que a outra fosse arremessada para fora da região com energia maior do que a inicial em que o ganho de energia foi feito a perda de rotação do buraco negro, este processo é chamado de super-radiância[14].

Propriedades termodinâmicas análogas de sistemas contendo buracos negros foram estudadas inicialmente por Bekenstein[21] e em seguida por Hawking[22]. Bekenstein foi o percussor e descobriu que existe uma entropia associada ao Buraco Negro, relacionada da seguinte forma:

$$S_{BN} = \frac{k_B A}{4l_p^2} \quad (2.31)$$

onde  $k_B$  é a constante de Boltzmann,  $A$  é a área do buraco negro e  $l_p^2 = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}}$  é o comprimento de Planck. Hawking estudou um processo no qual considerou um efeito quântico próximo ao horizonte, este efeito é o de criação e aniquilação de partículas.

Analisando a relação de incerteza[4],

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2} \quad (2.32)$$

ou seja, por breves instantes de tempo temos uma incerteza na energia, essa incerteza está relacionado com a energia de vácuo no qual existe ali uma criação e aniquilação de partículas e anti-partículas. Hawking imaginou este processo próximo ao horizonte do Buraco Negro, e analisou que estatisticamente nesse processo anti-partículas(energia negativa) cairiam no horizonte enquanto que as partículas(energia positiva) emanariam e para um observador distante o mesmo observaria um fluxo contínuo de energia, o Hawking calculou a temperatura[22, 4] de um Buraco Negro devido a essa emissão dado pela expressão:

$$T_{HAW} = \frac{hc^3}{8\pi Gk_B M} \quad (2.33)$$

onde M é a massa do Buraco Negro. O processo descrito é conhecido como Radiação Hawking. Vale ressaltar que Hawking considerou o objeto como sendo um corpo negro e a relação (2.32) foi a primeira expressão que uniu duas constantes universais, a constante de Planck h e a constante gravitacional de Newton G. Estas duas constantes estão relacionadas com a mecânica quântica e a relatividade geral respectivamente, ou seja, foi o primeiro indício teórico de uma teoria de unificação das leis da natureza. A absorção de anti-partículas causa uma contínua perda de massa do Buraco Negro[4]. Logo, para um tempo suficientemente longo este processo está responsável pela evaporação do Buraco Negro. Isto está relacionado à um paradoxo conhecido como "Paradoxo da perda de informação"[19]. A taxa na qual está relacionado a perda de massa é dada pela seguinte expressão[4]

$$\frac{dM}{dt} = -\frac{A(M)}{M^2} \quad (2.34)$$

onde  $A(M)$  é um coeficiente numérico que depende da energia a qual se produz o processo. Definimos até aqui duas quantidades termodinâmicas análogas relacionadas a sistemas contendo buracos negros, a temperatura e a entropia, podemos assim definir um conjunto de leis termodinâmicas[18] relacionadas à estes tipos de sistemas. A entropia da relação (2.31) ficou conhecida como entropia de Berkenstein-Hawking. Com isso a segunda Lei da Termodinâmica deve ser generalizada da seguinte forma[2]:

$$\delta \left( S + \frac{A}{4} \right) \geq 0 \quad (2.35)$$

no qual foi introduzido a entropia associado a buracos negros.

Vale ressaltar que a radiação Hawking ainda não foi detectada, embora existam pesquisadores que trabalham com modelos análogos[23, 24], e o método de detecção mais usado de buracos negros, mesmo que indiretamente, continua sendo usando técnicas astronômicas na detecção de raios X.

# Capítulo 3

## Não-comutatividade

Em Física, quando tentamos descrever a natureza através de relações matemáticas, devemos levar em conta todas as ferramentas a fim de se obter uma predição exata do mecanismo estudado. Na Mecânica Clássica por exemplo, se conhecemos a posição  $x(t)$  e o momento  $p(t)$  de uma partícula podemos obter qualquer informação do sistema em questão. Porém na Mecânica Quântica isto não funciona da mesma forma, para este caso ao invés de funções temos operadores Hermitianos  $\hat{x}$  e  $\hat{p}$  no qual o sistema físico em questão é governado pela relação de incerteza de Heisenberg:

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \quad (3.1)$$

onde  $\hbar = \frac{h}{2\pi}$  em que  $h$  é a constante de Planck. A relação (3.1) nos diz que não podemos obter com precisão posição e momento de uma partícula simultaneamente. A relação de comutação entre os operadores  $\hat{x}$  e  $\hat{p}$  dada por [25]:

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar \quad (3.2)$$

em que o limite clássico é recuperado fazendo  $\hbar \rightarrow 0$ . O exemplo descrito fez o uso de uma estrutura não-comutativa. Existe na Física outros mecanismos em que se usa uma estrutura não-comutativa.

Foi Snyder quem iniciou os trabalhos em 1947 [8] para construir teorias mais gerais usando não-comutatividade. O objetivo dele era de consertar divergências na Eletrodinâmica Quântica [26]. Snyder usou o argumento de que o espaço-tempo poderia ser quantizado, para pequenas escalas e altas energias e, assim, poderia ser construído a partir de uma álgebra não-comutativa. Para construir esta álgebra devemos considerar algo



mais geral do que os operadores  $\hat{x}$  e  $\hat{p}$ . Vamos considerar funções do espaço-tempo  $x^i$  e  $x^j$  em que a relação de comutação é dado por:

$$[x^i, x^j] = i\theta^{ij} \quad (3.3)$$

no qual o parâmetro  $\theta$  é um tensor anti-simétrico com dimensão de comprimento ao quadrado, estamos trabalhando com geradores Hermitianos da C-álgebra não-comutativa. Há consequências importantes nessa regra de quantização, pois ao considerarmos que coordenadas, por exemplo  $x$  e  $y$  não comutam, perdemos a noção de ponto no qual é substituída pela célula de Planck[26], um exemplo, ao tomarmos o sistema cartesiano para cada ponto em  $x$  teremos vários pontos em  $y$ . Usando esta estrutura trataremos sobre teorias não-locais em que a variedade 4-dimensional é substituída pelo espaço de Hilbert.

Pode-se construir toda uma teoria quântica de campos não-comutativa. Já que os campos dependem das coordenadas e os mesmos dependem da expressão (3.3), podemos introduzir esta nova teoria usando a lagrangiana da teoria de campos convencional e generalizar para uma classe de teoria de campos não-comutativa. Os dois principais pontos a serem abordados nessa estrutura, primeiro é que trabalha-se com teorias a curtas distâncias, ou seja, não-locais e segundo a não-comutatividade conflita diretamente a invariância de Lorentz[9]. Vale ressaltar que, ao quantizarmos as funções do espaço-tempo, estamos trabalhando apenas com a quantização das coordenadas espaciais, pois ao quantizarmos a coordenada temporal surgem divergências na teoria.

Em algumas teorias na Física geralmente é usado a estrutura não-comutativa, por exemplo em teorias de quantização da gravidade[9, 27]. Então, ao quantizarmos a gravidade, esta seria uma teoria não-local. Em paralelo à quantização da gravidade, tem a teoria das cordas[9] e a teoria M que também seriam teorias não-locais e essa não localidade seria definida e surgiria naturalmente por um parâmetro de não-comutatividade. Na teoria de matéria condensada surge naturalmente a questão da não-comutatividade[9], e o exemplo mais citado é o problema dos níveis de Landau. Que ao aplicar um campo magnético  $\vec{B}$  não uniforme em determinado sistema, recorrente a aplicação deste campo, verifica-se que as variáveis conjugadas  $x$  e  $y$  deixam de comutar[28]. Físicos vem construindo variações da teoria de Yang-Mills[9] no intuito de consertar divergências na faixa do UV. Estes são mais alguns exemplos na Física em que se usa uma álgebra não-comutativa.

## 3.1 Noções de Álgebra não-comutativa

Em Matemática, um grupo é uma estrutura algébrica constituído de uma função binária, em termos matemáticos temos:

$$\langle G; * \rangle \tag{3.4}$$

onde  $G = \emptyset$  é um conjunto de elementos (não-vazio) qualquer e  $(*)$  é uma operação realizada nesse conjunto. Para que um grupo seja formado, dado três elementos  $a, b$  e  $c$  do conjunto  $G$ , deve satisfazer três operações:

$$a.a^{-1} = e,$$

$$(a.b).c = (b.c).a,$$

e

$$c.e = c.$$

são inverso de um elemento, associatividade e elemento neutro respectivamente. A operação da comutatividade  $a.b = b.a$ , é dividido em dois grupos, o caso Abeliano (comutativo) e caso não-Abeliano (não-comutativo).

Podemos relacionar um grupo com uma determinada simetria na natureza, ou ainda, relacionar com um modelo ou teoria na Física. Para o trabalho em questão, estamos lidando com grupos não-Abelianos. Logo, devemos construir uma álgebra relacionada a isto, ou seja, trabalhar com um determinado espaço e definir o produto entre dois elementos desse espaço. Existe várias formas de obter essa álgebra, porém vamos trabalhar com uma forma mais elegante e mais geral do que a relação (3.3), por meio dos operadores de Weyl [26].

### 3.1.1 Operadores de Weyl

Para introduzir os operadores de Weyl, vamos fazer uso da álgebra comutativa e assim relacionar com a não-comutativa. Vamos trabalhar num espaço de funções em  $D$  dimensões no espaço euclidiano  $\mathcal{R}^D$ , no qual produto escalar entre duas funções desse espaço é o usual conhecido, e que esta função desse espaço decresça rapidamente. E iremos descrever uma função  $f(x)$  nesse espaço por uma transformada de Fourier [26]:

$$\tilde{f}(k) = \int d^D x e^{-ik_i x^i} f(x) \tag{3.5}$$

onde a transformada acima é a usual conhecida. Foi visto anteriormente, que ao quantizarmos um espaço mais geral do que aquele visto em Mecânica Quântica, substituímos o  $x^i$  por operadores Hermitianos  $\hat{x}^i$ . A quantização de Weyl é similar a esta, usando a relação (3.5), introduziremos o símbolo de Weyl dado por[26]:

$$\hat{\mathcal{W}}[f] = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \tilde{f}(k) e^{ik_i \hat{x}^i} \quad (3.6)$$

O operador de Weyl  $\hat{\mathcal{W}}[f]$  é Hermitiano se  $f(x)$  é um valor real. Podemos reescrever a expressão (3.6) da seguinte forma:

$$\hat{\mathcal{W}}[f] = \int d^D x f(x) \hat{\Delta}(x) \quad (3.7)$$

onde

$$\hat{\Delta}(x) = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} e^{ik_i \hat{x}^i} e^{-ik_i x^i} \quad (3.8)$$

o operador  $\hat{\Delta}(x)$  é Hermitiano[24]. Vejamos, da relação (3.8) que o operador  $\hat{\Delta}(x)$  é uma mistura entre operadores e campos, e analisemos também que ao tomar o limite de  $\theta^{ij} = 0$ , ou seja,  $x^i \cdot x^j = x^j \cdot x^i$  e assim escrevemos o operador como uma função delta  $\delta^D(\hat{x} - x)$ .

É definido então relações de comutação para o operador derivada  $\hat{\partial}_i$ [26, 9], dado por:

$$[\hat{\partial}_i, \hat{x}^j] = \delta_i^j; [\hat{\partial}_i, \hat{\partial}_j] = 0 \quad (3.9)$$

e com isso definimos:

$$[\hat{\partial}_i, \hat{\Delta}(x)] = -\hat{\partial}_i \hat{\Delta}(x) \quad (3.10)$$

E da relação (3.10) intitulamos o gerador translação que pode ser representado da seguinte forma[26], com  $v \in \mathcal{R}^D$  :

$$e^{v^i \hat{\partial}_i} \hat{\Delta}(x) e^{-v^i \hat{\partial}_i} = \hat{\Delta}(x + v) \quad (3.11)$$

Da relação (3.11) temos que o traço  $Tr \hat{\Delta}(x)$  na álgebra dos operadores de Weyl é independente de  $x$ , logo podemos definir da relação (3.7) que o  $Tr$  é a integração sobre todo o espaço[26, 9]:

$$Tr \hat{\mathcal{W}}[f] = \int d^D x f(x) \quad (3.12)$$

onde foi escolhido por questão de normalização  $Tr \hat{\Delta}(x) = 1$ . Nisso o operador traço é equivalente a integrar sobre as coordenadas não-comutativas  $\hat{x}^i$ .

Usando a fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff[29],

$$e^{ik_i \hat{x}^i} e^{ik'_i \hat{x}^i} = e^{-\frac{i}{2} \theta^{ij} k_i k'_j} e^{i(k+k')_i \hat{x}^i}$$

podemos computar o produto de operadores  $\hat{\Delta}(x)$  em diferentes pontos do espaço, usando a relação (3.8)

$$\begin{aligned}\hat{\Delta}(x)\hat{\Delta}(y) &= \int \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{d^D k'}{(2\pi)^D} e^{i(k+k')_i x^i} e^{-\frac{i}{2}\theta^{ij} k_i k'_j} e^{-ik_i x^i - ik'_i y^i} \\ &= \int \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{d^D k'}{(2\pi)^D} \int d^D z e^{i(k+k')_i z^i} \hat{\Delta} e^{-\frac{i}{2}\theta^{ij} k_i k'_j} e^{-ik_i x^i - ik'_i y^i}\end{aligned}\quad (3.13)$$

Integrando sobre todo o espaço dos momentos em  $k$  e  $k'$  na expressão (3.13), onde devemos normalizar a função a partir da matriz em  $\theta$ :

$$\hat{\Delta}(x)\hat{\Delta}(y) = \frac{1}{\pi^D |\det\theta|} \int d^D z \hat{\Delta}(z) e^{-2i(\theta^{-1})_{ij}(x-z)^i (y-z)^j} \quad (3.14)$$

no qual o traço vai ser dado por:

$$Tr(\hat{\Delta}(x)\hat{\Delta}(y)) = \delta^D(x-y) \quad (3.15)$$

e segue então que a transformação em (3.7) possui uma inversa,

$$f(x) = Tr(\mathcal{W}[f]\hat{\Delta}(x)). \quad (3.16)$$

O operador quântico para obter a função  $f(x)$  é usualmente chamado de função de distribuição de Wigner[30]. O mapa  $\hat{\Delta}(x)$  é a correspondência entre campos de Wigner e operadores de Weyl[26].

### 3.1.2 Produto Estrela

O primeiro passo para se construir a álgebra já foi dado, definimos um espaço de funções e alguma propriedades contidas neste. Agora temos que definir o produto interno entre duas funções que vivem nesse espaço. Adiantemos que, devido a relação (3.3), o produto vai ser modificado por um parâmetro  $\theta$  que ao tomarmos o limite retornamos ao produto interno da álgebra comutativa.

Tomando o produto de dois operadores de Weyl  $\hat{\mathcal{W}}[f]$  e  $\hat{\mathcal{W}}[g]$ , correspondente as funções  $f(x)$  e  $g(x)$ [26], a partir das definições que fizemos na sub-seção anterior temos que:

$$Tr(\hat{\mathcal{W}}[f]\hat{\mathcal{W}}[g]\hat{\Delta}(x)) = \frac{1}{\pi^D |\det\theta|} \int \int d^D y d^D z f(y)g(z) e^{-2i(\theta^{-1})_{ij}(x-y)^i (x-z)^j} \quad (3.17)$$

Para calcular este produto interno usaremos as expressões (3.5),(3.6) e a fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff, para deduzir que:

$$\hat{\mathcal{W}}[f]\hat{\mathcal{W}}[g] = \hat{\mathcal{W}}[f \star g] \quad (3.18)$$

onde é introduzido o Groenewold-Moyal produto estrela[31]

$$\begin{aligned}
f(x) \star g(x) &= \int \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{d^D k'}{(2\pi)^D} \tilde{f}(k) \tilde{g}(k' - k) e^{-\frac{i}{2} \theta^{ij} k_i k'_j} e^{i k'_i x^i} \\
&= f(x) \exp \left( \frac{i}{2} \overleftarrow{\partial}_i \theta^{ij} \overrightarrow{\partial}_j \right) g(x) \\
&= f(x) g(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{i}{2} \right)^n \frac{1}{n!} \theta^{i_1 j_1} \dots \theta^{i_n j_n} \partial_{i_1} \dots \partial_{i_n} f(x) \partial_{j_1} \dots \partial_{j_n} g(x) \tag{3.19}
\end{aligned}$$

O produto estrela (3.19) é associativo e vejamos que no limite com  $\theta \rightarrow 0$  retornamos ao produto usual.

## 3.2 Teoria de Gauge

Nesta seção, faremos um breve resumo da teoria de Yang-Mills analisando apenas as transformações deste caso, tomando para os dois regimes, tanto para os campos ordinários como os não-ordinários. Como um modelo análogo, teoria de Yang-Mills é a teoria eletromagnética não-abeliana no regime de altas energias. As transformações de gauge para o caso ordinário são[10]:

$$\delta_\lambda A_i = \partial_i \lambda + i[\lambda, A_i] \tag{3.20}$$

$$F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i - i[A_i, A_j] \tag{3.21}$$

$$\delta_\lambda F_{ij} = i[\lambda, F_{ij}] \tag{3.22}$$

onde  $A$  e  $\lambda$  são matrizes  $N \times N$  hermitianos. Para o caso não-ordinário usamos as mesmas leis de transformação no qual apenas trocamos a multiplicação usual pelo produto estrela (3.19) e os campos usuais são substituídos pela sua versão não-comutativa em que as leis de transformação são dadas por[10]:

$$\hat{\delta}_{\hat{\lambda}} \hat{A}_i = \partial_i \hat{\lambda} + i \hat{\lambda} \star \hat{A}_i - i \hat{A}_i \star \hat{\lambda}$$

$$\hat{F}_{ij} = \partial_i \hat{A}_j - \partial_j \hat{A}_i - i \hat{A}_i \star \hat{A}_j + i \hat{A}_j \star \hat{A}_i$$

$$\hat{\delta}_{\hat{\lambda}} \hat{F}_{ij} = i \hat{\lambda} \star \hat{F}_{ij} - i \hat{F}_{ij} \star \hat{\lambda}$$

Usamos o chapéu nos campos indicando a substituição por operadores. Para o caso de primeira ordem em  $\theta$  temos:

$$\hat{\delta}_{\hat{\lambda}} \hat{A}_i = \partial_i \hat{\lambda} - \theta^{kl} \partial_k \hat{\lambda} \partial_l \hat{A}_i + \mathcal{O}(\theta^2) \tag{3.23}$$

$$\hat{F}_{ij} = \partial_i \hat{A}_j - \partial_j \hat{A}_i + \theta^{kl} \partial_k \hat{A}_i \partial_l \hat{A}_j + \mathcal{O}(\theta^2) \quad (3.24)$$

$$\hat{\delta}_\lambda \hat{F}_{ij} = -\theta^{kl} \partial_k \hat{\lambda} \partial_l \hat{F}_{ij} + \mathcal{O}(\theta^2) \quad (3.25)$$

Temos aqui dois regimes de uma teoria, o caso ordinário dado pelas expressões (3.20)-(3.22) onde é a teoria usual de Yang-Mills e o caso não-ordinário dado pelas expressões (3.23)-(3.25) onde é o caso não-comutativo da teoria.

### 3.3 Mapa de Seiberg-Witten

Vimos na seção anterior duas formas de uma mesma teoria, nesta seção iremos introduzir um conceito importante na física de não-comutatividade conhecida por mapa de Seiberg-Witten[10]. Basicamente, esse método consiste em mapear os campos não-ordinários através dos campos usuais obtendo uma generalização da teoria de gauge usual, ou seja, podemos obter o campo não-comutativo em função dos campos da teoria usual.

Para obter este mapa, Seiberg e Witten propuseram uma expansão em termos dos campos de gauge dada por:

$$\hat{A}(A) + \hat{\delta}_\lambda = \hat{A}(A + \delta_\lambda A) \quad (3.26)$$

onde  $\lambda$  e  $\hat{\lambda}$  são parâmetros infinitesimais. Através da expansão, ou seja, no limite muito pequeno conseguimos aproximar até primeira ordem os campos não-ordinários em termos dos campos ordinários, basta agora fazer uma escolha para  $\hat{A}$  e  $\hat{\lambda}$ . Vamos aqui trabalhar com a expansão até primeira ordem em  $\theta$  no qual o produto estrela na expressão (3.19) é:

$$f \star g = fg + \frac{i}{2} \theta^{ij} \partial_i f \partial_j g + \mathcal{O}(\theta^2) \quad (3.27)$$

agora podemos fazer uma escolha[10]:

$$\hat{A} = A + A'(A)$$

$$\hat{\lambda} = \lambda + \lambda'(\lambda, A)$$

expandindo até primeira ordem a expressão (3.26) e usando a relação (3.27), ficamos com:

$$A'_i(A + \delta_\lambda A) - A'_i(A) - \partial_i \lambda' - i[\lambda', A_i] - i[\lambda, A'_i] = -\frac{1}{2} \theta^{kl} (\partial_k \lambda \partial_l A_i + \partial_l A_i \partial_k \lambda) + \mathcal{O}(\theta^2) \quad (3.28)$$

E a equação (3.28) pode ser resolvida, comparando os termos de mesma ordem, seguindo a relação de anti-comutação dada por:

$$\hat{A}_i(A) = A_i + A'_i(A) = A_i - \frac{1}{4} \theta^{kl} \{A_k, \partial_l A_i + F_{li}\} + \mathcal{O}(\theta^2) \quad (3.29)$$

$$\hat{\lambda}(\lambda, A) = \lambda + \lambda'(\lambda, A) = \lambda + \frac{1}{4}\{\partial_i \lambda, A_j\} + \mathcal{O}(\theta^2) \quad (3.30)$$

e por último podemos obter:

$$\hat{F}_{ij} = F_{ij} + \frac{1}{4}\theta^{kl}(2\{F_{ik}, F_{jl}\} - \{A_k, D_l F_{ij} + \partial_l F_{ij}\}) + \mathcal{O}(\theta^2) \quad (3.31)$$

onde finalmente obtemos expressões dos campos não-ordinários em função dos campos usuais isto é válido para primeira ordem em  $\theta$ .

# Capítulo 4

## Espalhamento

A métrica BTZ vem sendo estudada em diversos modelos na Física[32, 33]. Por ser um buraco negro que possui o fator da constante cosmológica o que deixa não-assintoticamente plano, torna-se um laboratório teórico ideal para se estudar teorias ADs/CFT[34]. Neste capítulo vamos estudar esta métrica sob um campo de fundo não-comutativo e estudaremos sobre o processo de espalhamento.

### 4.1 Modelo de Higgs Abeliano

Nesta seção iremos fazer uma breve apresentação do modelo que vamos usar no presente trabalho. Na Física temos um artifício matemático, a Teoria de Campos. O mecanismo consiste no seguinte esquema, representamos determinado modelo ou teoria através de uma lagrangeana que depende de um campo  $\phi(\vec{x}; t)$ , e depois variamos a lagrangeana usando o princípio da mínima ação, ou seja,  $\delta S = 0$ , para assim, obtermos as equações de movimento em termos do campo. Como exemplo mais simples, podemos usar a teoria de Klein-Gordon, onde a Lagrangeana é dada por[35]:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \mathcal{V}(\phi) \quad (4.1)$$

e variando a ação  $\mathcal{S} = \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$  temos:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} = 0 \quad (4.2)$$

em que usando a Lagrangeana (4.1) obtemos as seguintes expressões

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = -\frac{d\mathcal{V}}{d\phi}$$



$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = \partial^\mu \phi$$

para um caso específico em que  $\mathcal{V}(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2$ , com a assinatura da métrica  $(+,-,-,-)$ , obtemos a seguinte equação de movimento,

$$(\square + m^2)\phi = 0 \quad (4.3)$$

onde  $\square = \partial_\mu \partial^\mu$ , em que deduzimos para o caso de espaço-plano. Podemos assim obter quantidades físicas importantes dependendo do modelo em que estamos trabalhando.

Para modelos mais gerais temos uma langrageana que pode depender de mais de um campo. No modelo de Higgs Abelian, por exemplo, temos uma langrageana que depende de dois campos, um real e um complexo, a qual é dada por[36]:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + D_\mu\phi(D^\mu\phi)^* + m^2\phi\phi^* - \frac{\lambda}{4}\phi\phi\phi^*\phi^* \quad (4.4)$$

em que o primeiro termo da equação (4.4) é a langrageana de Maxwell com  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  e na parte cinética(derivada covariante<sup>1</sup>) temos  $D_\mu\phi = (\partial_\mu - ieA)\phi$ , em que temos o complexo conjugado desta derivada  $D_\mu\phi^* = (\partial_\mu + ieA_\mu)\phi$ . Este modelo é aplicado em diversas ramificações da Física, como por exemplo em Física de Partículas, Supercondutividade, Matéria Condensada entre outros[37].

Para o trabalho em questão vamos considerar a versão não-comutativa deste modelo, onde os campos são substituídos pela sua versão não-ordinária, ou seja, o campo  $\phi$  é substituído pelo operador campo  $\hat{\phi}$ . O produto entre dois operadores campo  $\hat{\phi}$  é substituído pelo produto Weyl-Moyal(vide cap.3). Assim, ficamos com:

$$\hat{\mathcal{L}} = \frac{1}{4}\hat{F}_{\mu\nu} \star \hat{F}^{\mu\nu} + (D^\mu \hat{\phi})^\dagger \star D^\mu \hat{\phi} + m^2 \hat{\phi}^\dagger \star \hat{\phi} - b \hat{\phi}^\dagger \star \hat{\phi} \star \hat{\phi}^\dagger \star \hat{\phi} \quad (4.5)$$

onde o produto entre dois é dado por:

$$f(x) \star g(x) = \exp\left(\frac{i}{2}\theta^{\mu\nu}\partial_\mu^x\partial_\nu^y\right) f(x)g(y)|_{x=y}$$

A Langrageana (4.5) pode ser expandida em termos de série em  $\theta$ . Porém usaremos o mapa de Seiberg-Witten e escrever os campos não-ordinários em termos dos campos comutativos, ou seja, utilizaremos as relações (3.29)-(3.31) podemos obter:

$$\hat{A}_\mu = A_\mu + \theta^{\nu\rho} A_\rho \left( \partial_\nu A_\mu - \frac{1}{2}\partial_\mu A_\nu \right)$$

---

<sup>1</sup>A derivada covariante é a generalização para espaços mais gerais da derivada parcial.

$$\hat{F}_{\mu\nu} = F_{\mu\nu} + \theta^{\rho\beta}(F_{\mu\rho}F_{\nu\beta} + A_\rho\partial_\beta F_{\mu\nu})$$

e

$$\hat{\phi} = \phi - \frac{1}{2}\theta^{\mu\nu}A_\mu\partial_\nu\phi.$$

Substituindo as expressões acima na langrangeana (4.5) e reorganizando os termos, ficamos com[38]:

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{L}} = & -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \left(1 + \frac{1}{2}\theta^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\right) + \left(1 - \frac{1}{4}\theta^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\right) (|D_\mu\phi|^2 + m^2|\phi|^2 - b|\phi|^4) \\ & + \frac{1}{2}\theta^{\alpha\beta}F_{\alpha\mu}[(D_\beta)^\dagger D^\mu\phi + (D^\mu\phi)^\dagger D_\beta\phi] \end{aligned} \quad (4.6)$$

onde o parâmetro  $\theta^{\alpha\beta}$  é uma constante com dimensão de comprimento ao quadrado, representado por uma matriz  $D \times D$  antissimétrica.

## 4.2 Métrica BTZ Não-Comutativa

Nesta seção veremos o caso da métrica BTZ não-comutativa. Adiantemos que analogamente como obtido para o campos  $\phi$  e  $A_\mu$ , também foi usado o mapa de Seiberg-Witten. Inicialmente esta métrica foi obtida usando teoria de Chern-Simons, onde sabemos que há uma equivalência entre gravidade não-comutativa e esta teoria, para mais detalhes sobre este procedimento ver referência[39]. Foi mostrado em [40] que há uma equivalência entre teoria de Chern-Simons e gravidade em (2+1) dimensões, então podemos usar o mapa de Seiberg-Witten para obter uma solução do BTZ não-comutativa usando as expressões (3.29) e (3.30), onde em coordenadas cilíndricas a métrica é dada por[40]:

$$ds^2 = -F^2 dt^2 + N^{-2} dr^2 + 2r^2 N^\phi dt d\phi + \left(r^2 + \frac{\theta B}{2}\right) d\phi^2 \quad (4.7)$$

onde

$$\begin{aligned} N^\phi &= -\frac{r_+ r_-}{l r^2} \\ F^2 &= \frac{(r^2 - r_+^2 - r_-^2)}{l^2} - \frac{\theta B}{2} \\ N^2 &= \frac{1}{l^2 r^2} \left[ (r^2 - r_+^2)(r^2 - r_-^2) - \frac{\theta B}{2} (2r^2 - r_+^2 - r_-^2) \right] \end{aligned}$$

onde  $r_+$  e  $r_-$  são os horizontes externo e interno do caso comutativo definido por[41]:

$$r_\pm^2 = \frac{l^2 M}{2} \left[ 1 \pm \sqrt{1 - \left(\frac{J}{Ml}\right)^2} \right]. \quad (4.8)$$

Notemos que não existe divergências para o caso de  $\theta = 0$ , onde recuperamos a métrica usual. A não-comutatividade afeta diretamente a noção de ponto, ou seja, a massa  $M$  para o caso desta métrica é afetado, deixando de ser uma massa pontual, passando a ser uma distribuição de massa.

Substituindo o  $r_{\pm}$  na expressão (4.7) podemos reescrever a métrica na seguinte forma:

$$ds^2 = -f dt^2 + \mathcal{Q}^{-1} dr^2 - \frac{J}{r} r dt d\phi + \left(1 - \frac{\theta B}{2r^2}\right) r^2 d\phi^2 \quad (4.9)$$

onde

$$f = -M + \frac{r^2}{l^2} - \frac{\theta B}{2}$$

$$\mathcal{Q} = -M + \frac{r^2}{l^2} + \frac{J^2}{4r^2} - \frac{\theta B}{2} \left(\frac{2}{l^2} - \frac{M}{r^2}\right)$$

Agora fazendo uma substituição do tipo  $d\phi = \frac{d\phi'}{2r}$  podemos escrever o  $g_{\mu\nu}$  na forma matricial da seguinte forma[41]:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -f & 0 & -\frac{J}{2r} \\ 0 & \mathcal{Q}^{-1} & 0 \\ -\frac{J}{2r} & 0 & \left(1 - \frac{\theta B}{2r^2}\right) \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

com a inversa  $g^{\mu\nu}$ ,

$$g^{\mu\nu} = \frac{1}{-g} \begin{pmatrix} -\left(1 - \frac{\theta B}{2r^2} \mathcal{Q}^{-1}\right) & 0 & -\frac{J}{2r\mathcal{Q}} \\ 0 & -g\mathcal{Q} & 0 \\ -\frac{J}{2r\mathcal{Q}} & 0 & \frac{f}{\mathcal{Q}} \end{pmatrix}. \quad (4.11)$$

E por definição  $g = \det(g_{\mu\nu})$  com  $-g$  dado por:

$$-g = \left[ \frac{\theta B}{2} \left(-1 - \frac{1}{l^2} + \frac{M}{r^2}\right) + \frac{J^2}{4r^2} \frac{r^2}{l^2} - M \right] \mathcal{Q}^{-1} = \left[ \frac{\theta B}{2} \left(\frac{1}{l^2} - 1\right) + \mathcal{Q} \right] \mathcal{Q}^{-1} \quad (4.12)$$

### 4.3 Equações de Movimento

Nesta seção iremos obter as equações de Euler-Lagrange para a langrageana (4.6) para os campos  $\phi$  e  $\phi^*$ . Usaremos para este problema a métrica (4.10) e tomaremos o limite linear do modelo Higgs Abelian expandido via Seiberg-Witten, ou seja, fazendo  $b = 0$  (é apenas uma condição matemática para assim trabalhar com equações em que podemos resolver). Como estamos trabalhando com espaços curvos a expressão (4.6) será

multiplicada pelo fator  $\sqrt{-g}$ , logo ficaremos com:

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} \left[ \left( 1 - \frac{1}{4} \theta^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \right) (D_\mu \phi D^\mu \phi^* + \mu^2 \phi \phi^*) + \frac{1}{2} \theta^{\alpha\beta} F_{\alpha\mu} (D_\beta \phi^* D^\mu \phi + D^\mu \phi^* D_\beta \phi) \right] \quad (4.13)$$

Excluimos o termo  $-\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$  pois iremos obter as equações apenas para o campo  $\phi$ . Usamos  $\mu$  como sendo o fator de massa<sup>2</sup>. Podemos ainda reescrever o último termo da expressão (4.13) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} &= [D_\beta \phi^* D^\mu \phi + D^\mu \phi^* D_\beta \phi] \\ &= 2g^{\mu\sigma} [D_\beta \phi^* D_\sigma \phi] \end{aligned}$$

Aqui trabalharemos no regime no qual  $\theta^{0i} = 0, \theta^{ij} = \epsilon^{ijk} \theta^k$  e  $F_{ij} = \epsilon^{ijk} B^k$  [38]. Onde tomaremos apenas a projeção do campo magnético na direção z. Então no termo  $\theta^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}$  na langrangeana ficamos com:

$$\begin{aligned} \theta^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} &= \theta^{0i} F_{0i} + \theta^{ij} F_{ij} \\ \theta^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} &= 2\theta_z \cdot B_z = 2\tilde{B} \end{aligned}$$

onde foi restringido o campo magnético projetado em z. Renomeamos também o fator contraído  $\Theta^{\beta\sigma} = \theta^{\alpha\beta} F_\alpha^\sigma$ , no qual a langrangeana numa forma simplificada fica:

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} \left[ \left( 1 - \frac{1}{2} \tilde{B} \right) (D_\mu \phi D^\mu \phi^* + \mu^2 \phi \phi^*) + \Theta^{\beta\sigma} (D_\beta \phi^* D_\sigma \phi) \right] \quad (4.14)$$

Vamos obter as equações de movimento para  $\phi^*$ ;

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^*} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^*)} = 0$$

Da equação (4.14), segue:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^*} = \sqrt{-g} \left[ \left( 1 - \frac{1}{2} \tilde{B} \right) g^{\mu\nu} (\partial_\mu \phi i e A_\nu + e^2 A_\mu A_\nu) + \mu^2 \phi + \Theta^{\beta\sigma} (i e A_\beta \partial_\sigma \phi + e^2 A_\beta A_\sigma \phi) \right].$$

E

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^*)} &= \sqrt{-g} \left[ \left( 1 - \frac{1}{2} \tilde{B} \right) g^{\mu\nu} (\partial_\nu \phi - i e A_\nu \phi) + \Theta^{\beta\sigma} (\delta_\beta^\mu \partial_\sigma \phi - i e A_\sigma \phi \delta_\beta^\mu) \right] \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^*)} &= \sqrt{-g} \left[ \left( 1 - \frac{1}{2} \tilde{B} \right) D^\mu \phi + \Theta^{\mu\sigma} D_\sigma \phi \right]. \end{aligned}$$

---

<sup>2</sup>Para não confundir com os números quânticos m que será usado mais adiante

Redefinindo a constante  $\tilde{\theta} = \left(1 - \frac{1}{2}\tilde{B}\right)$  e reorganizando os termos, a equação de movimento se torna:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu \left[ \sqrt{-g} \left( D^\mu \phi + \frac{\Theta^{\mu\sigma}}{\tilde{\theta}} \right) \right] - [g^{\mu\nu}(\partial_\mu \phi i e A_\nu + e^2 A_\mu A_\nu \phi)] \\ - \mu^2 - \frac{\Theta^{\beta\sigma}}{\tilde{\theta}}(i e A_\beta \partial_\sigma \phi + e^2 A_\beta A_\sigma \phi) \end{aligned} \quad (4.15)$$

Para a expressão (4.15) vamos usar uma solução tipo onda plana  $\phi \sim e^{i\omega}$ , pois queremos obter uma equação do tipo Schrodinger para assim fazer a análise do potencial. Faremos aqui a escolha de um gauge  $A_\mu$  arbitrário, tal que o rotacional resulte em um campo com projeção na direção z, ou seja,  $B_z = \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ . Para isso iremos usar o rotacional em coordenadas cilíndricas<sup>3</sup> dado por:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} \vec{r} & r\vec{\varphi} & \vec{z} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_r & rA_\varphi & A_z \end{pmatrix}$$

calculando o rotacional de modo que teremos um campo magnético resultante na direção z,

$$B_z = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi) - \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)$$

e escolhendo  $A_r = 0$ , temos:

$$\begin{aligned} B_z &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi) \\ A_\varphi &= \frac{rB_z}{2} \end{aligned} \quad (4.16)$$

A solução tipo onda que iremos usar vai ser dado por[41]:

$$\phi(t, r, \varphi) = R(r)e^{i(\omega t - m\varphi)}$$

Então desmembrando cada termo da expressão (4.15),

$$\begin{aligned} (*) &= \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu \left[ \sqrt{-g} \left( g^{\mu\nu} D_\nu \phi + \frac{\Theta^{\mu\sigma}}{\tilde{\theta}} D_\sigma \phi \right) \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu [\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi] - \frac{ie}{\sqrt{-g}}\partial_\mu [\sqrt{-g} g^{\mu\nu} A_\nu \phi] \\ &+ \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu \left[ \frac{\Theta^{\mu\sigma}}{\tilde{\theta}} \sqrt{-g} \partial_\sigma \phi \right] - \frac{ie}{\sqrt{-g}}\partial_\mu \left[ \sqrt{-g} \frac{\Theta^{\mu\sigma}}{\tilde{\theta}} A_\sigma \phi \right] \end{aligned}$$

o determinante g depende apenas de r, logo a derivada em t e  $\varphi$  são nulas. Lembrando que o tensor definido por  $\Theta^{\mu\sigma} = \theta^{\alpha\mu}$ , em que as únicas componentes não-nulas serão no

---

<sup>3</sup>Simetria na coordenada z

termo  $\theta^{22}$ . O primeiro termo da expressão (\*) pode ser visto na referência [41], no qual ao desenvolvermos cada termo contraído<sup>4</sup> na componente da métrica  $g_{rr}$  surge um termo e na componente da métrica em  $g_{\varphi\varphi}$  surge um termo  $\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r$ , estes termos extras vem devido a substituição feita na métrica em (4.10). Notemos que ao tomar o limite  $\theta B = 0$  recaímos na equação padrão do laplaciano, então ficamos com:

$$(*) = \left[ \left(1 - \frac{\theta B}{2r^2}\right) \omega^2 - \frac{Jm\omega}{r^2} - \frac{m^2 f}{r^2} \right] \frac{R(r)}{(-g)\mathcal{Q}} + \frac{1}{r\sqrt{-g}} \frac{d}{dr} \left[ r\mathcal{Q}\sqrt{-g} \frac{d}{dr} \right] R(r) \\ - \left[ \frac{emfB_z}{2r} - \frac{e\omega JB_z}{4r} \right] \frac{R(r)}{(-g)\mathcal{Q}} - \frac{\theta_z B_z}{\theta} \left[ m^2 + \frac{emrB_z}{2} \right] \quad (4.17)$$

chamando de (\*\*) =  $\partial_\mu \phi g^{\mu\nu} ieA_\nu + e^2 A_\mu g^{\mu\nu} A_\nu$ , desenvolvendo os índices mútuos segue que:

$$= \partial_\varphi \phi g^{\varphi\varphi} ieA_\varphi + \partial_t \phi g^{t\varphi} ieA_\varphi + e^2 A_\varphi g^{\varphi\varphi} A_\varphi \phi$$

então temos que,

$$(**) = \frac{1}{(-g)\mathcal{Q}} \left[ \frac{emfB_z}{2r} + \frac{e^2 B_z^2 f}{4} + \frac{e\omega JB_z}{4r} \right] R(r) \quad (4.18)$$

e por último (\*\*\*) =  $\frac{\theta^{\beta\sigma}}{\theta} [ieA_\beta \partial_\sigma \phi + e^2 A_\beta A_\sigma]$

$$(***) = \frac{\theta_z B_z}{\tilde{\theta}} \left[ \frac{emrB_z}{2} + \frac{e^2 r^2 B_z^2}{4} \right] \quad (4.19)$$

Reunindo os termos (4.17)-(4.19) e o termo que ficou sobrando em (4.15), obtemos a seguinte equação radial:

$$\left[ \left(1 - \frac{\theta B}{2r^2}\right) \omega^2 - \frac{Jm\omega}{r^2} - \frac{m^2 f}{r^2} \right] \frac{R(r)}{(-g)\mathcal{Q}} + \frac{1}{r\sqrt{-g}} \frac{d}{dr} \left[ r\mathcal{Q}\sqrt{-g} \frac{d}{dr} \right] R(r) - \mu^2 R(r) \\ - \left[ \frac{emfB_z}{r} + \frac{e\omega JB_z}{2r} + \frac{e^2 B_z^2 f}{4} \right] \frac{R(r)}{(-g)\mathcal{Q}} - \frac{\tilde{B}}{\theta} \left[ emrB_z + m^2 + \frac{e^2 r^2 B_z^2}{4} \right] R(r) = 0 \quad (4.20)$$

Vamos agora fazer uma substituição do tipo  $F(r) = \sqrt{-g}\mathcal{Q}(r)$ , no intuito de simplificar a expressão (4.20), onde iremos obter a seguinte expressão:

$$\left[ \left(1 - \frac{\theta B}{2r^2}\right) \omega^2 - \frac{Jm\omega}{r^2} - \frac{m^2 f}{r^2} \right] R(r) + \frac{F(r)}{r} \frac{d}{dr} \left[ rF(r) \frac{d}{dr} \right] R(r) - (-g)\mathcal{Q}\mu^2 R(r) \\ - \left[ \frac{emfB_z}{r} + \frac{e\omega JB_z}{2r} + \frac{e^2 B_z^2 f}{4} \right] R(r) - (-g)\mathcal{Q} \frac{\tilde{B}}{\theta} \left[ emrB_z + m^2 + \frac{e^2 r^2 B_z^2}{4} \right] R(r) = 0 \quad (4.21)$$

O objetivo aqui é chegar numa equação na forma de Schrodinger  $\frac{d^2\psi}{dx^2} + \omega^2\psi = V(r)\psi$ , para isto vamos introduzir uma nova coordenada  $G(\rho) = \sqrt{r}R(r)$  onde

$$\frac{d}{d\rho} = F(r) \frac{d}{dr}$$

---

<sup>4</sup>A convenção de Einstein é comumente usado de forma que não sobrecarregue a notação:  $\sum \partial_\mu A^\mu = \partial_\mu A^\mu = \partial_0 A^0 - \partial_i A^i$ .

derivando  $R(r)$  em relação a nova variável  $\rho$ , temos

$$\frac{dR}{dr} = \frac{dG}{d\rho} \frac{1}{F(r)\sqrt{r}} - \frac{G(\rho)}{2\sqrt{r^3}}$$

$$\frac{d^2R}{dr^2} = \frac{d^2G}{d\rho^2} \frac{1}{F^2(r)\sqrt{r}} - \frac{dG}{d\rho} \frac{dF}{dr} \frac{1}{F^2(r)\sqrt{r}} - \frac{dG}{d\rho} \frac{1}{F(r)\sqrt{r^3}} + \frac{3}{4} \frac{G(\rho)}{\sqrt{r^5}}$$

substituindo as expressões acima na equação (4.21), ficamos com:

$$\begin{aligned} \frac{d^2G}{d\rho^2} + \left[ \frac{F^2(r)}{4r^2} - \frac{F(r)}{2r} \frac{dF}{dr} \right] G(\rho) + \left[ \left(1 - \frac{\theta B}{2r^2}\right) \omega^2 - \frac{Jm\omega}{r^2} - \frac{m^2 f}{r^2} \right] G(\rho) \\ - (-g) \mathcal{Q} \mu^2 G(\rho) - \left[ \frac{emfB_z}{r} + \frac{e\omega JB_z}{2r} + \frac{e^2 B_z^2 f}{4} \right] G(\rho) \\ - (-g) \mathcal{Q} \frac{\tilde{B}}{\theta} \left[ emrB_z + m^2 \frac{e^2 r^2 B_z^2}{4} \right] G(\rho) = 0 \end{aligned} \quad (4.22)$$

Agora que obtemos uma equação na forma de Schrodinger (com derivadas segunda e a própria função), basta voltarmos para a coordenada radial. Iremos fazer outra substituição [41] do tipo:

$$X(r) = \sqrt{F(r)} G(\rho)$$

derivando a expressão

$$\frac{dG}{d\rho} = \frac{dX}{dr} F^{\frac{1}{2}}(r) - \frac{X(r)}{2F(r)} \frac{dF}{dr}$$

$$\frac{d^2G}{d\rho^2} = \frac{d^2X}{dr^2} F^{\frac{3}{2}} + \frac{X(r)}{4F^{\frac{1}{2}}} \left( \frac{dF}{dr} \right)^2 - \frac{X(r)}{2F(r)} \frac{d^2F}{dr^2}$$

e substituindo na expressão (4.22), obtemos finalmente:

$$\begin{aligned} \frac{d^2X}{dr^2} + \left[ \frac{1}{F^2(r)} \left( \frac{dF}{dr} \right)^2 - \frac{1}{2F(r)} \right] X(r) + \left[ \frac{F^2(r)}{4r^2} - \frac{F(r)}{2r} \frac{dF}{dr} \right] \frac{X(r)}{F^2(r)} \\ \left[ \left(1 - \frac{\theta B}{2r^2}\right) \omega^2 - \frac{Jm\omega}{r^2} - \frac{m^2 f}{r^2} \right] \frac{X(r)}{F^2(r)} - \frac{\tilde{B}}{\theta} \left[ emrB_z + m^2 + \frac{e^2 r^2 B_z^2}{4} \right] \frac{(-g) \mathcal{Q}}{F^2(r)} X(r) \\ - \frac{(-g) \mathcal{Q}}{F^2(r)} \mu^2 X(r) - \left[ \frac{emfB_z}{r} + \frac{e\omega JB_z}{2r} + \frac{e^2 B_z^2 f}{4} \right] \frac{X(r)}{F^2(r)} = 0 \end{aligned} \quad (4.23)$$

Obtemos uma equação na forma de Schrodinger em que foi expandida tanto a métrica  $g_{\mu\nu}$  como o campo  $\phi$  via mapa de Seiberg-Witten, na próxima seção iremos trabalhar com um caso em especial.

## 4.4 Fator de corpo cinza

Nesta seção faremos uma breve explanação sobre este fator de corpo cinza e calcular para um caso específico neste trabalho. Foi com a radiação Hawking que surgiu a fronteira entre a Relatividade Geral e a Teoria Quântica de Campos no qual esta [22] pode ser vista, caso comprovada experimentalmente (podendo ser em modelos análogos), como um passo importante na quantização de gravidade. Então, se um Buraco Negro emite determinada radiação, podemos então obter leis termodinâmicas análogas ao caso clássico. Hawking obteve esta lei baseando-se no preceito de que o Buraco Negro seguisse as mesmas leis de absorção e emissão de um corpo negro, ou seja, a curva característica da radiação seria de um corpo negro. A famosa relação do Hawking [42] usa o limite semi-clássico para mostrar que um buraco negro emite um espectro térmico, dado por:

$$\langle n(\omega) \rangle = \frac{\gamma(\omega)}{e^{\frac{\omega}{T_H}} \pm 1} \quad (4.24)$$

onde  $T_H$  é a temperatura Hawking. E o sinal de mais e menos são para os casos de férmions e bosons respectivamente. O  $\langle n(\omega) \rangle$  é o valor esperado do número de partículas emitidas com frequência  $\omega$ . O fator  $\gamma(\omega)$  é apelidado de fator de corpo cinza [43], e é definido pela relação entre o espectro de radiação assintótico<sup>5</sup> e o espectro da radiação de corpo negro. Veja que se tomarmos o caso  $\gamma(\omega) = 1$  a relação (4.24) recai exatamente para Lei de Planck para radiação de corpo negro.

Para calcular este fator  $\gamma(\omega)$ , basicamente temos que resolver um problema de espalhamento<sup>6</sup> calculando a solução da equação tipo Schrodinger [43]:

$$-\frac{d\phi_\omega}{dx^2} + V(x)\phi_\omega = \omega^2\phi_\omega \quad (4.25)$$

onde  $\omega$  é a frequência angular. Notemos que, similarmente para um problema em Mecânica Quântica temos um potencial produzido e uma partícula que esteja sujeito a este potencial, basicamente resolvemos a solução da expressão (4.25) para regiões diferentes e através da conexão entre estas calculamos o quanto de radiação que "escapa". No caso de buracos negros assintoticamente planos, simplesmente resolvemos a expressão (4.25) para  $\pm\infty$ , onde temos como solução:

$$\phi_\omega \sim e^{i\omega x} + Re^{-i\omega x}, x \rightarrow +\infty \quad (4.26)$$

---

<sup>5</sup>A radiação que escapa do potencial produzido pelo Buraco Negro.

<sup>6</sup>Pense num problema similar em Mecânica Quântica, em que temos uma partícula restringida à uma barreira de potencial.



$$\phi_\omega \sim T e^{i\omega x}, x \rightarrow -\infty \quad (4.27)$$

em que calculando o Wronskiano das soluções  $\mathcal{W}(+\infty) = \mathcal{W}(-\infty)$ [38], obtemos:

$$|R|^2 + |T|^2 = 1 \quad (4.28)$$

No trabalho em questão estamos trabalhando com a métrica BTZ(não-assintoticamente plana), ou seja, temos que resolver a equação para uma região  $r \gg r_H$  e interligar a solução com a região  $r \ll 2r_H$ <sup>7</sup>. A equação (4.22) que obtemos na seção anterior em função da coordenada  $\rho$ (tortoise), tomando o limite da métrica BTZ não-comutativa no "background"<sup>8</sup>, dada por:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 G}{d\rho^2} + \left[ \frac{f^2(r)}{4r^2} - \frac{f(r)}{2r} \frac{df}{dr} \right] G(\rho) + \left[ \omega^2 - \frac{m^2 f}{r^2} \right] G(\rho) - f \mu^2 G(\rho) - \left[ \frac{emfB_z}{r} + \frac{e^2 B_z^2 f}{4} \right] \\ - r^2 \frac{\tilde{B}}{\theta} \left[ emrB_z + m^2 + \frac{e^2 r^2 B_z^2}{4} \right] G(\rho) \end{aligned} \quad (4.29)$$

em que tomando  $\theta B = 0$  obtemos  $-g = 1$  e com  $J = 0$  recaímos  $Q = f = -M + \frac{r^2}{l^2}$ , tomamos o limite de J igual a zero devido a problemas que apareceram na equação final em que caímos num problema tipo Sturm-Liouville[44]. Podemos reescrever a expressão (4.29) na seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 G}{d\rho^2} + \left\{ \omega^2 - \frac{f(r)}{r^2} \left[ \frac{r}{2} \frac{df}{dr} - \frac{f(r)}{4} + m^2 + \mu^2 r^2 + emrB_z \omega + \frac{e^2 r^2 B_z^2}{4} + \right. \right. \\ \left. \left. r^2 \frac{\tilde{B}}{\theta} \left( emrB_z + m^2 + \frac{e^2 r^2 B_z^2}{4} \right) \right] \right\} G(\rho) = 0 \end{aligned} \quad (4.30)$$

ou seja, fizemos isto no intuito de obter o termo explícito do potencial, como seguinte,

$$\left[ \frac{d^2}{d\rho^2} + \omega^2 - V(r) \right] G(\rho) = 0$$

com o potencial dado por:

$$V(r) = \frac{f(r)}{r^2} \left[ \frac{r}{2} \frac{df}{dr} - \frac{f(r)}{4} + m^2 + \mu^2 r^2 + emrB_z \omega + \frac{e^2 r^2 B_z^2}{4} + r^2 \frac{\tilde{B}}{\theta} \left( emrB_z + m^2 + \frac{e^2 r^2 B_z^2}{4} \right) \right]$$

Vamos encontrar as soluções para três regiões[43](Figura 4.1) com  $r_H$  dado pelo raio do horizonte. Para a região I será a região próxima ao horizonte de eventos definido por  $r \simeq r_H$  e  $V(r) \ll \omega^2$ , a região II, ou seja, a região intermediária será definida por  $V(r) \gg \omega^2$  e a região III definida por  $r \gg r_H$ . Para calcular o raio do horizonte basta

<sup>7</sup>No limite do horizonte de eventos.

<sup>8</sup>Apesar de não colocar explicitamente resolvemos para este limite e verificamos que basta anular  $\theta B$ (métrica) na equação final e resulta na mesma expressão.

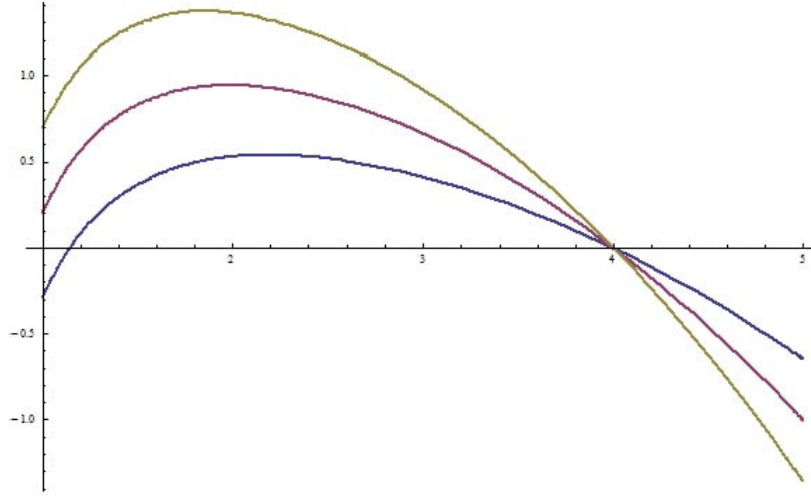


Figura 4.1: Gráfico  $V(r)$  :  $M = 1; m = 1; l = 4; \mu = 0.1; e = 0.1; B_z = 0.5; \tilde{\theta} = -1$ (azul);  $\tilde{\theta} = -1.5$ (rosa);  $\tilde{\theta} = -2$ (amarelo)

fazermos  $f(r) = 0$ , para o caso sem rotação  $J = 0$ , teremos  $r_H = l\sqrt{M}$ . E para próximo do horizonte  $r \simeq r_H$ , podemos reescrever a métrica BTZ função  $f(r)$  da seguinte forma[43],

$$f(r) \simeq 2k_H(r - r_H) \quad (4.31)$$

com  $k_H = \frac{1}{2}f'(r_H)$  em que está relacionado com a temperatura Hawking de um buraco negro, da seguinte forma:

$$T_H = \frac{k_H}{2\pi} \quad (4.32)$$

tomaremos o caso aqui para baixas frequências.

$$\omega \ll T_H; \omega r_H \ll 1 \quad (4.33)$$

Região I: Foi definido para esta região  $r \simeq r_H$  e  $V(r) \ll \omega^2$ , então podemos reescrever o potencial de (4.30):

$$V(r) \simeq \frac{f(r)}{r_H^2} \simeq \frac{2r_H(r - r_H)}{l^2 r_H^2}$$

$$V(r) \simeq \frac{2}{l^2} \frac{(r - r_H)}{r_H}$$

e a condição  $\omega^2 \gg V(r)$

$$\frac{(r - r_H)}{r_H} \ll \omega^2 \quad (4.34)$$

então  $r - r_H \ll r_H$ , desde que a frequência angular ao quadrado seja muito grande comparada ao potencial, podemos escrever a equação (4.30):

$$\left[ \frac{d^2}{d\rho^2} + \omega^2 \right] G(\rho) = 0 \quad (4.35)$$

em que a solução é, apenas para a onda incidente  $\rho \rightarrow -\infty$

$$G(\rho) = A_I e^{i\omega\rho} \quad (4.36)$$

Estamos tomando a solução para a região  $r \simeq r_H$  com a substituição feita na seção anterior, podemos derivar  $\rho$  em função de  $r$  usando a seguinte relação,

$$\frac{d}{d\rho} = f(r) \frac{d}{dr}$$

com  $f(r)$  dado por (4.31), logo ficamos com:

$$\rho \simeq \frac{l}{\sqrt{M}} \ln \left( \frac{r - l\sqrt{M}}{l\sqrt{M}} \right) \quad (4.37)$$

Podemos deixar a expressão (4.36) em termos de exponencial, porém vamos fazer uma consideração para que a conexão entre as regiões I e II seja feita suavemente<sup>9</sup>[43].

$$\frac{r - r_H}{r_H} \gg e^{-\frac{2k_H}{\omega}} \quad (4.38)$$

junto com a condição (4.34) reescrevemos a solução como,

$$G(\rho) \simeq 1 + i\omega\rho \quad (4.39)$$

então temos a solução geral para esta região,

$$\phi_I = A_I \left[ 1 + \frac{i\omega l}{2\sqrt{M}} \ln \left( \frac{r - l\sqrt{M}}{l\sqrt{M}} \right) \right] \quad (4.40)$$

onde  $A_I$  é uma constante, escrevemos a solução nesta forma para em seguida comparar com as outras regiões nos limites de  $r$ . Região II: Esta região é definida para  $V(r) \gg \omega^2$ [43].

A equação de onda é:

$$\frac{d}{dr} \left[ r f(r) \frac{d}{dr} \right] R(r) = 0 \quad (4.41)$$

no qual a solução é:

$$g(r) \frac{dR}{dr} = B_{II}$$

---

<sup>9</sup>De modo que facilite a conexão entre as regiões.

$$\int dR = \int \frac{B_{II}}{g(r)} dr$$

$$R(r) = A_{II} + B_{II}N(r) \quad (4.42)$$

com

$$N(r) = \int \frac{dr'}{g(r')}, g(r) \equiv rf(r) \quad (4.43)$$

em que  $A_{II}$  e  $B_{II}$  são constantes. Vamos conectar com a região I, fazendo  $r \simeq r_H$  para a solução (4.40), logo o  $N(r)$

$$N(r) \simeq \int \frac{ldr'}{r_H^2 \sqrt{M}(r - l\sqrt{M})}$$

$$N(r) \simeq \frac{1}{2M} \ln \left( \frac{r - l\sqrt{M}}{l\sqrt{M}} \right) \quad (4.44)$$

então podemos conectar as duas soluções e escrever as constantes da região II em termos das constantes da região I, logo temos:

$$A_{II} = A_I, B_{II} = i\omega l \sqrt{M} A_I \quad (4.45)$$

a solução é então

$$\Phi_{II} = A_I \left( 1 + i\omega l \sqrt{M} \int \frac{dr'}{r' f_a(r')} \right) \quad (4.46)$$

onde  $f_a(r)$  é o termo assintótico [43]. Fizemos a consideração (4.42) para conectar com a região I, para o nosso caso  $\frac{r^2}{l^2} \gg M$  na região II, ficando com  $f(r) \simeq f_a(r) = \frac{r^2}{l^2}$ , então a solução geral é,

$$\Phi_{II}(r) = A_I \left( 1 - i \frac{\omega l^3 \sqrt{M}}{2r^2} \right). \quad (4.47)$$

Notemos que até aqui resolvemos para as regiões I e II sem usar o potencial  $V(r)$  em si, ou seja, para qualquer métrica  $J = 0$  podemos generalizar, para mais detalhes veja referência [43]. Usaremos a solução (4.47) para conectar com a solução da região III. Região III: E agora para a região III vamos usar a equação obtida na seção anterior, em termos da função radial  $R(r)$ , dada por,

$$\frac{d^2 R}{dr^2} \left( \frac{1}{r} \frac{1}{f(r)} \frac{df}{dr} \right) \frac{dR}{dr} \left[ \frac{\omega^2}{f(r)^2} - \frac{emB_z}{2f(r)} + \frac{e^2 B_z^2}{4f(r)} \right. \\ \left. - \frac{\tilde{B}}{\theta} \left( \frac{emB_z r}{f(r)} + \frac{m^2}{f(r)} + \frac{e^2 r^2 B_z^2}{4f(r)} \right) \right] R(r) = 0 \quad (4.48)$$

aqui tomamos o limite para  $r \gg r_H$  [45], onde o termo predominante  $\frac{e^2 B_z^2 l^2}{4}$  prevalece sobre todos os outros e fazendo  $\tilde{B} < 0$ , ficamos com,

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{3}{r} \frac{dR}{dr} + \frac{\tilde{B}}{\theta} \left( \frac{e^2 B_z^2 l^2}{4} \right) R(r) = 0 \quad (4.49)$$

a solução da equação (4.49) é dada por:

$$\Phi_{III}(r) = C_1 \frac{J_1\left(\frac{\sqrt{\Theta}eB_z l r}{2}\right)}{r} + C_2 \frac{N_1\left(\frac{\sqrt{\Theta}eB_z l r}{2}\right)}{r} \quad (4.50)$$

onde  $J_1$  e  $N_1$  são as funções de Bessel de 1° e 2° tipo respectivamente e  $\Theta = \frac{\tilde{B}}{(1-\frac{\tilde{B}}{2})}$ . Para conectar com a região II temos que tomar o limite de  $r$  muito pequeno. As funções de Bessel neste limite são dadas por:

$$J_1(x) \simeq \frac{x}{2}$$

$$N_1(x) \simeq -\frac{2}{\pi x} + \frac{x}{\pi}(\ln x + b)$$

usando as expansões acima ( $\frac{1}{r^2} \gg \ln r$ ) com  $b \simeq -1,307$  e comparando com a solução da região II dada pela expressão (4.47), no qual usamos o limite  $\frac{\kappa r}{2} \ll 1 \therefore \frac{r}{2} \ll \frac{1}{\kappa}$ , com  $\kappa = eB_z l \sqrt{\Theta}$  encontramos os valores das constantes  $C_1$  e  $C_2$ ,

$$C_1 = \left(4\kappa - \frac{i\omega l^3 \sqrt{M} b}{4\kappa}\right) A_I$$

$$C_2 = \frac{i\omega \pi l^3 \sqrt{M}}{8\kappa} A_I$$

Notemos que para calcular o fator de corpo cinza, resolvemos um problema similar que vimos em Mecânica Quântica ,ou seja, calculamos as funções de onda para regiões diferentes e no limite destas encontramos as constantes que podemos relacionar com os coeficientes de transmissão e reflexão da onda[25]. Com este fator calculamos o quanto de radiação Hawking[46] é transmitida através de uma barreira de potencial e assim calcular a radiação que chega à um observador externo, então queremos encontrar o coeficiente de transmissão[43]  $|T|^2 = \gamma(\omega) = 1 - |R|^2$  com  $|R|^2 = \frac{|C_2|^2}{|C_1|^2}$ , temos:

$$\gamma(\omega) = 1 - \frac{\left|\frac{i\omega \pi l^3 \sqrt{M}}{8\kappa}\right|^2}{\left|4\kappa - \frac{i\omega l^3 \sqrt{M} b}{4\kappa}\right|^2}$$

$$\gamma(\omega) = 1 - \frac{\omega^2 l^6 M \pi^2}{4(256\kappa^4 + \omega^2 l^6 b^2)} \quad (4.51)$$

Vejamos ainda que podemos relacionar o fator de corpo cinza  $\gamma(\omega)$  com o fator de absorção  $\sigma$ . Tomando o limite com  $\omega^2 \ll \kappa^4 M$  da equação (4.51) a expressão torna-se  $\gamma(\omega) = 1$ , ou seja, o fator de transmissão se torna máximo igual 1, absolutamente nada da radiação "escapa" e então o objeto absorve tudo e parece totalmente negro visto por um observador externo. Esta é outra razão para este fator ser chamado assim (corpo

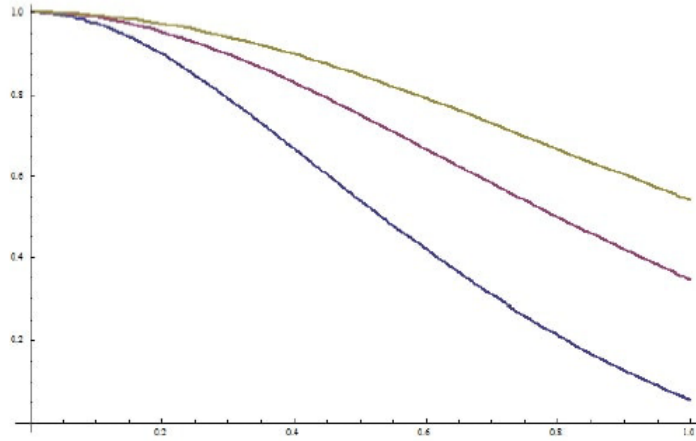


Figura 4.2: Plot expressão(4.51):  $l = 1.5$ ;  $M = 1$ ;  $e = 0.6$ ;  $B_z = 0.5$ ;  $b = -1.3$ ;  $\tilde{\theta} = -1$ (*azul*);  $\tilde{\theta} = 1.5$ (*amarelo*);  $\tilde{\theta} = -2$ (*rosa*)

cinza), pois altera a radiação e visto por um observador externo o corpo pareceria meio acinzentado[46]. Analisando o gráfico da expressão (4.51), vemos que para quanto maior o coeficiente de não-comutatividade(ao quadrado)  $\Theta$  há um deslocamento para cima do fator de corpo cinza, e para que o  $\gamma(\omega)$  não possua valores negativos temos que limitar os valores das constantes que aparecem na expressão. Chegamos a expressão (4.51) levando em consideração sempre para baixas frequências  $\omega l \sqrt{M} \ll 1$ , ou seja, neste regime no plot ficamos restringido para valores pequenos de  $\omega$ , para o caso de altas frequências deve-se considerar os modos normais da onda e o procedimento para calcular[43] é diferente do que usamos aqui.

# Capítulo 5

## Considerações Finais

O uso de álgebras não-comutativas vem sendo aplicada em diversas áreas na Física, de matéria condensada (níveis de Landau) à teoria de Yang-Mills. Estas estruturas surgem para tentar resolver alguns problemas de teorias não-locais, uma delas na tentativa de quantizar a gravidade onde consideram que seria uma teoria não-local como na Mecânica Quântica, como a teoria de cordas e no modelo de branas.

Propriedades termodinâmicas de buracos negros são importantes para o ponto de vista teórico. Para o melhor entendimento desses objetos gravitacionais, e assim poder aplicar em modelos análogos produzindo-os em laboratórios e estudar possíveis aplicações em outras áreas.

Derivamos aqui neste trabalho o fator de corpo cinza, apelidado assim pois modifica a lei de radiação de corpo negro e visto por um observador o corpo em questão pareceria cinza. Usamos o modelo Higgs Abelian expandido via mapa de Seiberg-Witten sob a perspectiva de fundo da métrica BTZ, e obtemos um fator que como previsto em algumas referências, onde depende apenas da frequência angular.

Para trabalhos futuros, poderíamos considerar o momento angular  $J$  diferente de zero e tomar o parâmetro de não-comutatividade do campo  $\vec{\theta} \cdot \vec{B}$  igual a zero. Foi mostrado no trabalho, mas não explicitamente, obtemos também uma equação tipo Schrödinger assintótica que ao plotar o potencial possui estados ligados sendo ideal assim para calcular o efeito Aharonov-Bohm gravitacional.

# Apêndice A

## Cálculo Tensorial

Vetor contravariante

$$A'^{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\lambda}} A^{\lambda}$$

Vetor covariante

$$B'_{\mu} = \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\mu}} B_{\lambda}$$

e um tensor nada mais é que uma mistura dos dois anteriores, onde temos por definição:

$$T'^{\mu\nu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\lambda}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\omega}} T^{\lambda\omega}$$

$$T'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\omega}}{\partial x'^{\nu}} T_{\lambda\omega}$$

$$T'^{\nu}_{\mu} = \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\lambda}} \frac{\partial x^{\omega}}{\partial x'^{\mu}} T^{\lambda}_{\omega}$$

A métrica é qualquer tensor simétrico de rank(0,2):

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu} \tag{A.1}$$

E a partir disso podemos definir outras quantidades tensoriais, como a conexão:

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\kappa} = \frac{1}{2} g^{\mu\lambda} (\partial_{\nu} g_{\lambda\kappa} + \partial_{\kappa} g_{\lambda\nu} - \partial_{\lambda} g_{\nu\kappa}) \tag{A.2}$$

E definir o tensor de Riemann,

$$R^{\mu}_{\nu\kappa\lambda} = \partial_{\kappa} \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} - \partial_{\lambda} \Gamma^{\mu}_{\nu\kappa} + \Gamma^{\rho}_{\nu\lambda} \Gamma^{\mu}_{\rho\kappa} - \Gamma^{\rho}_{\nu\kappa} \Gamma^{\mu}_{\rho\lambda} \tag{A.3}$$

e assim definir o tensor de Ricci:

$$R_{\mu\nu} = g^{\kappa\lambda} R_{\lambda\mu\kappa\nu} \tag{A.4}$$



E contraindo o tensor de Ricci, encontramos o escalar de Ricci:

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \tag{A.5}$$

E por definição o tensor de Einstein:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \tag{A.6}$$

# Referências Bibliográficas

- [1] Weinberg, S., **Gravitation e Cosmology: Principles and Applications of the General Relativity**. Jonh Wiley and Sons , (1972).
- [2] Carrol, Sean., **Spacetime and geometry: An Introduction to General Relativity**. Addison Wesley, (2004).
- [3] Wald, R., **General Relativity**. The University of Chicago Press, (1984).
- [4] Horvath, J.E.,Custódio,P.S.,**Os Buracos Negros na ciência atual:Um brevíssimo manual introdutório**. Livraria da Física, (2012).
- [5] S. W. Hawking,**Black Holes and Thermodynamics**, Phys. Rev. D13 (1976) 191.
- [6] Piero Nicolini, **Noncommutative Black Holes, the final appeal to quantum gravity: A review**. arXiv:0807.1939v2 [hep-th] 9 Feb 2009.
- [7] Mir Faizal, R.G.G. Amorim, S.C. Ulhoa,**On Noncommutative Black Holes Thermodynamics**. arXiv:1504.05555v1 [gr-qc] 21 Apr 2015.
- [8] H.S Snyder, **Quantized Spacetime**. Phys. Rev. 71,38.
- [9] Michael R. Douglas and Nikita A. Nekrasov **Noncommutative Field Theory**. arXiv:hep-th/01060448v4.
- [10] N. Seiberg, E. Witten **String Theory and Noncommutative Geometry** arXiv:hep-th/9908142v3.
- [11] Russel, B., **ABC da Relatividade**. Zahar ,(2005).
- [12] Einstein, A., **A teoria da Relatividade Especial e Geral** Methuen and Co Ltd (1920).

- [13] Einstein, A., Infield, L., **A Evolução da Física**. Zahar, (2008).
- [14] D. Inverno, Ray., **Introducing Einstein's Relativity**. Oxford University Press, (1998).
- [15] Das, A., **Lectures on Gravitation**. World Scientific, (2011).
- [16] Banados, M., Teitelbom, C., Zanelli, J., **Black Hole in Three-Dimensional Space-time**. *Phy. Rev. Letters* 69,13 (1992).
- [17] Wald, R.M., **Gravitational Collapse and Cosmic Censorship**. <http://arxiv.org/abs/gr-qc/9710068>.
- [18] Frolov, V., Novikov, Igor., **Black Hole Physics: Basic Concepts and New Developments**. Kluwer Academic Publishers (1997).
- [19] Susskind, L., **An Introduction to Black Holes, Information and The String Theory Revolution**. World Scientific (2005).
- [20] R. Penrose, *Riv. Nuov. Cim.* 1(edición especial), 252 (1969).
- [21] J. D. Bekenstein, *Phys. Rev. D* , 2333 (1973).
- [22] S. W. Hawking, *Nature* 248,30 (1974); *Comm. Math. Phys.* 43, 199 (1975).
- [23] G. Eskin **Radiation Hawking from acoustic Black Holes in two space dimensions**. arXiv:1608.05860v3[gr-qc] 16 Jan 2017.
- [24] M.A. Anacleto, F.A. Brito, A. Mohammadi **Aharonov-Bohm effect for a fermion field in the acoustic black hole "spacetime"**. arXiv:1606.09231v2[hep-th] 2 Dec 2016.
- [25] Griffiths, D., **Introduction to Quantum Mechanics**. Pearson.
- [26] Richard J. Szabo **Quantum Field Theory on Noncommutative Spaces**. arXiv:hep-th/0109162v4.
- [27] Victor O. Rivelles **Noncommutative Supersymmetric Fiel Theories**. arXiv:hep-th/ 0103131v1.

- [28] R. Jackiw **Noncommutating fields and non-Abelian fluids.** arXiv:hep-th/0305022v2.
- [29] E. Brown **Bloch Electrons in a Uniform Magnetic Field,** Phys. Rev. 133 (1963) 1038.
- [30] E.P. Wigner, **Quantum Corrections for Thermodynamics Equilibrium** Phys. Rev. 40 (1932) 749.
- [31] H.J. Groenewold, **On the Principles of Elementary Quantum Mechanics.** Physica 12 (1946)405.J.E. Moyal Quantum Mechanics as a Statistical Theory. Proc. Cambridge Phil. Soc. 45 (1949) 99.
- [32] Shoichi Kawamoto., Koichi Nagasaki., Wen-Yu Wen **Charged rotating BTZ black holes in noncommutative space and a torsion gravity.** arXiv:1701.01005[hep-th] 4 Jan 2017.
- [33] Chao Liang., Li Gang., Bao Cheng Zhang **Smarr formula for BTZ black holes in general three-dimensional gravity models.** arXiv:1701.03223v1 [gr-qc] 12 Jan 2017.
- [34] Juan Maldacena **The Large N Limit of Superconformal field Theories and supergravity.** arXiv:hep-th/9711200v3 22 Jan 1998.
- [35] Das, A. **Lectures on Quantum Field Theory.** World Scientific (2008).
- [36] Franz, M.,Graham, Shaw **Lectures on Quantum Field Theory** 2ed. John Wiley (2010).
- [37] D. Bazeia **Campos escalares em ação.** Tese, João Pessoa (2004).
- [38] M.A. Anacleto,F.A. Brito, E. Passos **Noncommutative analogue Aharonov-Bohm effect and superresonance.** arXiv:1210.7739v2 [hep-th] 27 May 2013.
- [39] Rashida Jahangin, K. Saifullah **Thermodynamics of noncommutative BTZ black hole.** arXiv:1101.6073v1 [gr-qc] 31 Jan 2011.
- [40] EE Chang-Young, Daeho Lee, Youngone Lee **Noncommutative BTZ Black Hole in Polar Coordinates.** arXiv:08082330v3 [hep-th] 15 Dec 2008.

- [41] M.A. Anacleto, F.A. Brito, E. Passos **Gravitational Aharonov-Bohm effect due to noncommutative BTZ black hole**. arXiv:1408.4481v2 [hep-th] 24 Feb 2015.
- [42] S.W, **Particle Creation by Black Holes**, Commun. Math. Phys. 43 (1975)199.
- [43] Troels Hamark, José Natário e Ricardo Schiappa **Greybody Factors for d- Dimensional Black Holes**. arXiv:0708.0017v2 [hep-th] 15 Aug 2007.
- [44] Vladimir A. Marchenko., **Sturm-Liouville Operators and Applications**. AMS Chelsea Publishing, Rev. ed. (1922).
- [45] Grigoris Panotopoulos., Angel Rincon **Greybody factors for a nonminimally coupled scalar field in BTZ black-hole background**. arXiv:1611.06233v1 [hep-th] 18 Nov 2016.
- [46] Jorge Escobedo., **Greybody Factors: Hawking Radiation in Disguise**. Master's Thesis, University of Amsterdam, 3 Ago 2008.