



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE  
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIAS  
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA  
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA  
**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

**A VIOLAÇÃO DA INVARIÂNCIA DE LORENTZ COM ALTAS ORDENS  
DERIVATIVAS E APLICAÇÕES NA TEORIA DE CAMPOS EM (1+1)  
DIMENSÕES.**

Adriano dos Santos Oliveira

Campina Grande - PB

- 2017 -

Adriano dos Santos Oliveira

**A VIOLAÇÃO DA INVARIÂNCIA DE LORENTZ COM ALTAS ORDENS  
DERIVATIVAS E APLICAÇÕES NA TEORIA DE CAMPOS EM (1+1)  
DIMENSÕES.**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Campina Grande, como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Eduardo Marcos Rodrigues dos Passos

Co-orientador: Prof. Dr. João Rafael Lúcio dos Santos

Campina Grande - PB

- 2017 -

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL DA UFCG

O48v

Oliveira, Adriano dos Santos.

A violação da invariância de Lorentz com altas ordens derivativas e aplicações na teoria de campos em (1+1) dimensões / Adriano dos Santos Oliveira. – Campina Grande, 2017.

52 f. : il.

Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2017.

"Orientação: Prof. Dr. Eduardo Marcos Rodrigues dos Passos, Prof. Dr. João Rafael Lúcio dos Santos".

Referências.

1. Campos Escalares. 2. Defeitos Topológicos. 3. Violação da Invariância de Lorentz. I. Passos, Eduardo Marcos Rodrigues dos. II. Santos, João Rafael Lúcio dos. III. Título.

CDU 537.8(043)

Adriano dos Santos Oliveira

**A VIOLAÇÃO DA INVARIÂNCIA DE LORENTZ COM ALTAS ORDENS  
DERIVATIVAS E APLICAÇÕES NA TEORIA DE CAMPOS EM (1+1)  
DIMENSÕES.**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Física, da Unidade Acadêmica de Física, do Centro de Ciências e Tecnologia, da Universidade Federal de Campina Grande, como requisito parcial para a obtenção do título de mestre em Física.

Aprovada em : \_\_\_\_\_

BANCA EXAMINADORA:

---

**Prof. Dr. Eduardo Marcos Rodrigues dos Passos**  
(Presidente - UFCG/UAF)

---

**Prof.Dr. Francisco de Assis de Brito**  
(Avaliador interno - UFCG/UAF)

---

**Prof. Dr. Marcos Antônio Anacleto**  
(Avaliador interno - UFCG/UAF)

---

**Prof. Dr. Carlos Alberto Gomes de Almeida**  
(Avaliador externo - UFPB/DCE)

*"Jamais considere seus estudos como uma obrigação, mas como a oportunidade invejável para aprender a conhecer a influência libertadora da beleza do reino do espírito, para seu próprio prazer pessoal e para proveito da comunidade a qual seu trabalho pertencer ."*

*(Albert Einstein)*

*Dedico esse trabalho a minha família, dos quais cito meu pai Zé Flor, minha mãe Zefa que sempre me apoiaram nessa caminhada.*

# Agradecimentos

A Deus por ser meu guia e nunca me abandonar.

Aos meus Pais que sempre me apoiaram de maneira incondicional.

A minha esposa Renata Medeiros que estar sempre ao meu lado, ajudando a superar os momentos difíceis.

Ao meu orientador Eduardo Passos e ao co-orientador João Rafael Lúcio dos Santos que me deram todo o embasamento teórico e estímulo para concluir este estudo.

Aos professores que fizeram parte da minha formação acadêmica.

A Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo suporte financeiro, onde sem o qual eu não teria condições de realizar este curso.

A todos que vivenciaram esta etapa tão importante para minha vida.

# Resumo

Neste trabalho, consideramos a eletrodinâmica quadri-dimensional estendida com operadores de dimensão-cinco de Myers-Pospelov que violam a invariância de Lorentz e estudamos a sua projeção de 4D para 2D do espaço-tempo. Ao projetar a teoria de 4D para uma teoria em 2D, obtemos análogos do operadores de altas ordens derivativas. A saber, obtemos uma nova teoria bi-dimensional correspondente a de Myers-Pospelov mediada por operadores de dimensão-três violando a invariância de Lorentz descrita por dois campos escalares. Nosso foco é o de usar esta Lagrangeana como uma nova abordagem de se obter defeitos topológicos analíticos. Os termos cinéticos de altas ordens associados as equações de movimento são não-triviais quando integrados. Descrevemos três cenários possíveis para as equações de movimento tais como os regimes tipo-tempo, tipo-espaço e tipo-luz para o parâmetro que controla a violação da invariância de Lorentz. Iniciamos nossos estudos com *Ansatz* de ondas viajantes tipo-kink para teoria livre, que conduz restrições para a relação de dispersão em cada cenário. Estudamos também um procedimento para se obter soluções analíticas para teoria geral nos três cenários. Exemplificamos o procedimento e discutimos o comportamento da soluções tipo defeitos.

Palavras-Chave: Campos escalares. Defeitos topológicos. Violação da invariância de Lorentz.

# Abstract

In this work, we consider the four-dimensional electrodynamics extended with Myers-Pospelov Lorentz invariance violating dimension-five operators to study 4D to 2D projection. In projecting out the 4D theory down to a 2D theory we get analogs of these operators. Namely, we obtain a new two dimensional theory with corresponding 2D Myers-Pospelov Lorentz invariance violating dimension-three operators for two scalar fields. Our focus is to use this Lagrangian as an approach to obtain analytical topological defects. The higher-order kinetic terms associate to equations of motion are non-trivial to be integrated. We describe three possible scenarios for the equations of motion, named by time-like, space-like and light-like to Lorentz invariance violating parameter. We started our studies with a kinklike travelling wave *Ansatz* for the free theory, which led us to constraints for the dispersion relations of each scenario. We also study a procedure to obtain analytical solutions for the general theory in the three mentioned scenarios. We exemplified the procedure and discussed the behavior of the defect solutions.

Keywords: Scalar fields. Topological defects. Lorentz invariance violation.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>10</b>
<b>2</b>	<b>Extensão da eletrodinâmica com operadores de dimensão-cinco</b>	<b>13</b>
2.1	As equações de Maxwell modificadas . . . . .	14
2.2	Modos de propagação das ondas eletromagnéticas . . . . .	15
<b>3</b>	<b>Campos escalares de Myers-Pospelov em (1+1) dimensões</b>	<b>17</b>
3.1	Projeção dimensional 4D-2D . . . . .	17
3.2	Modelo de Myers-Pospelov escalar em (1+1)dimensões . . . . .	19
<b>4</b>	<b>Defeitos topológicos: Soluções particulares</b>	<b>21</b>
4.1	Regime tipo-tempo . . . . .	23
4.2	Regime tipo-espaço . . . . .	24
4.3	Regime tipo-luz . . . . .	24
4.4	Análises Gráficas . . . . .	26
<b>5</b>	<b>Defeitos topológicos: Soluções gerais analíticas</b>	<b>28</b>
5.1	Modelo estático . . . . .	28
5.1.1	Exemplo $\phi^4 + \chi^4$ . . . . .	30
5.2	Defeitos tipo ondas viajantes . . . . .	35
5.2.1	Exemplo: modelo BNRT . . . . .	36
<b>6</b>	<b>Conclusão e Perspectiva</b>	<b>41</b>
<b>A</b>	<b>Obtenção da equação de movimento</b>	<b>43</b>
<b>B</b>	<b>O tensor energia-momentum no formalismo de altas derivadas</b>	<b>45</b>

# Lista de Figuras

- 4.1 O campo  $\phi$  para os cenários tipo-tempo, tipo-espaco e tipo-luz, com  $g = 0.1$ . A evoluçao temporal ( $t = 0,5$  a esquerda e  $t = 1$  a direita) das soluçoes, mostram o comportamento quiral para as soluçoes tipo-espaco e tipo-luz. . . . . 27
- 5.1 O potencial à esquerda para  $g = (\alpha k)^{-1}$ ,  $\alpha = 204,96$ , e  $k = 1$ . A direita o gráfico do contorno de  $V$ , onde a linha vermelha representa a órbita analítica do presente modelo conectando o mínimo  $(-1,-1)$  com  $(1,1)$ . . . . . 33
- 5.2 O potencial a esquerda para  $g = (\alpha k)^{-1}$ ,  $\alpha = 24,61$ , e  $k = 1$ . A direita o gráfico do contorno de  $V$ , onde a linha vermelha representa a órbita analítica do presente modelo conectando o mínimo  $(-1,-1)$  com  $(1,1)$ . . . . . 34
- 5.3 Os campos  $\phi$  e  $\chi$  do modelo  $\phi^4 - \chi^4$ , onde os *kinks* foram gerados com  $k = (\alpha g)^{-1}$ ,  $\alpha = 204,96$ ,  $g = 0,005$  (curva sólida vermelha), e  $g = 0,001$  (curva azul tracejada). Concluimos que pequenos valores de  $g$  resultam em transições mais intensas entre os vácuos. . . . . 34
- 5.4 O gráfico do campo  $\phi$ , para o tipo-tempo do modelo BNRT. Os kinks foram gerados com  $k_{+1}$ ,  $\alpha = 55,96$ ,  $g = 0,03$  (cura sólida vermelha),  $g = 0,005$  (curva tracejada azul),  $\omega = 1$ , em  $t = 0$  a esquerda e  $t = 10$  a direita. Concluimos que pequenos valores de  $g$  resultam num rápido deslocamento dos defeitos. . . . . 39
- 5.5 O potencial a esquerda para o tipo-tempo, com  $b = a(\alpha k_{+1})^{-1}$ ,  $\alpha = 596,30$ ,  $k_{+1} = 2$ ,  $\omega = 1$ , e  $g = 0,003$ . A direita temos o contorno do potencial  $V$ , onde a linha vermelha representa a órbita analítica do modelo conectando o mínimo  $(-1,0)$  com  $(0,1)$ . . . . . 40

5.6 O potencial a esquerda para o tipo-tempo, com  $b = a(\alpha k_{+1})^{-1}$ ,  $\alpha = 55,96$ ,  $k_{+1} = 2$ ,  $\omega = 1$ , e  $g = 0,03$ . A direita temos o contorno do potencial  $V$ , onde a linha vermelha representa a órbita analítica do modelo conectando o mínimo  $(-1,0)$  com  $(0,1)$ . . . . . 40

# Capítulo 1

## Introdução

Como bem conhecemos, a invariância de Lorentz desempenha uma regra importante na física moderna. Atualmente, ela é um dos fundamentos da relatividade especial/geral e do modelo padrão que tem sido intensivamente testada no sistema solar e em experimentos de colisões de partículas. Se a invariância de Lorentz for violada, os pilares da física moderna enfraquecerão e uma nova física será necessária. Assim, é de interesse testar a possibilidade da Violação da Invariância de Lorentz (VIL) com vários experimentos terrestres e observações astrofísicas/cosmológicas [1, 2].

Uma visão mais realística está associada a perspectiva de uma nova física na escala de energia de Planck ( $M_P \sim 10^{19}\text{GeV}$ ) conduzir a cenários descritos por teorias que absorvem a VIL. Neste regime de energia, ambas as invariâncias Lorentz e de Carga-Paridade-Temporal (CPT) esperam-se ser quebradas. Um dos principais trabalhos que descrevem esse cenário, é o artigo seminal de Myers-Pospelov [3], em que consideram modificações cúbicas para as relações de dispersão relacionadas com operadores derivativos e massivos de dimensão-cinco ao longo de um quadri-vetor constante  $n_\mu$  interagindo com campos escalares, férmions e fótons.

No sentido de explorar os efeitos dessa nova abordagem, Myers-Pospelov introduzem, por exemplo, uma Lagrangeana eletromagnética efetiva através de um termo cinético modificado, o artigo mencionado, conjectura que esta teoria de campos fornece uma estrutura capaz de determinar limites fenomenológicos para a VIL diante de interações na ordem da escala de Planck.

Nos últimos anos, diversas investigações teóricas e fenomenológicas usam a teoria efetiva acima como instrumento que prever sinais de VIL através da teoria quântica de campos. Estudos teóricos resumem-se nos cálculos de quantização [4], comportamento

de analidades de soluções e estabilidades da energia [5, 6] e por fim, abordagens do espaço-tempo curvo [7]. Por outro lado, estudos fenomenológicos registram limites sobre a VIL pelo uso de recentes observações astrofísicas, como podemos observar, por exemplo, as referências [8-13]. Contudo, foi levantado por Brito e colaboradores [14] que também é relevante focar para os efeitos de baixa dimensionalidade do espaço-tempo de tais operadores que introduzem a VIL. Neste caso, os autores projetam de forma sucessiva a eletrodinâmica quântica de Myers-Pospelov em quatro dimensões (4D) numa teoria de duas dimensões (2D). Este procedimento de projeção dimensional conduz a uma transição de operadores de altas ordens derivativas. Uma das perspectivas apontada pela referência [14] é a de investigar a presença de soluções tipo defeitos topológicos no setor escalar do modelo. Portanto, o principal objetivo desta dissertação é de estudar um procedimento analítico capaz de encontrar defeitos topológicos que satisfaçam as equações de movimento associadas ao setor escalar da  $\mathcal{L}_{2D}$ .

Defeitos topológicos estão presentes em muitos ramos da Física, tais como na Física da Matéria Condensada, modelos que descrevem dinâmica biológica e cenários que descrevem paredes de domínios, por exemplo. As soluções de defeitos topológicos são bastante interessantes, principalmente pelo fato de que elas apresentam estabilidade linear diante de pequenas perturbações e conteúdo de energia finita. Algumas classes de modelos em 2D foram investigados no sentido de encontrar soluções tipo defeitos topológicos, foram estudados por exemplo, por Bazeia e colaboradores [15] os quais apresentam modelos estáticos e analíticos cujas as formas dos potenciais e das soluções dependem da intensidade do termo de VIL. Em seguida, esta abordagem foi generalizada por de Souza Dutra e colaboradores [16], inserindo a VIL através de um modelo de dois campos escalares em 2D que descrevem soluções de ondas viajantes e defeitos estáticos.

Uma característica relevante sobre a Lagrangeana de Myers-Pospelov em 2D aparece quando comparada aos modelos anteriores (baixa ordem derivativa) é que por se apresentar em altas ordens derivativas isto impõem muitas dificuldades para se encontrar soluções analíticas. Portanto nosso foco é o de estudar procedimentos que solucionam de forma satisfatória, as equações de movimento devido a operadores de altas ordens derivativas<sup>1</sup>. Uma vez elaborado tais procedimentos, eles serão aplicados de forma sucessiva

---

<sup>1</sup>São operadores que apresentam números de derivadas a mais do que os termos usuais da Teoria Quântica de Campos, pois queremos simular teorias da Gravidade Quântica com modelos de teoria de Campos.

aos defeitos tipo *sólitons* e defeitos tipo *ondas viajantes*.

Este trabalho de dissertação é descrito a seguir. No Cap.2, introduzimos o termo de Myers-Pospelov como modificação da eletrodinâmica clássica mediado por quadri-vetores constantes. As equações de movimento e a relação de dispersão são obtidas. No Cap.3, estudamos o efeito de redução dimensional da eletrodinâmica de Myers-Pospelov de 4D para 2D. Usamos o processo de projeção dimensional de 4D para 2D, primeiro para o setor de Maxwell e em seguida para o setor devido a modificação de Myers-Pospelov. Obtemos uma teoria de campos escalares com operadores de altas ordens derivativas em 2D. No Cap.4, encontramos soluções particulares para as equação de movimento nos três cenários, tipo-tempo, tipo-espaço e tipo-luz, onde analisamos sua características de propagação. No Cap.5, encontramos soluções gerais de defeitos para as equações de movimento, onde utilizamos um método de resolução de equações diferenciais que pode ser aplicado tanto para defeitos tipo sólitons quanto para defeitos tipo-ondas viajantes. Por último, no cap.6, apresentamos nossas conclusões e perceptivas.

Ao longo deste trabalho adotaremos o sistema natural de unidades:  $c = \hbar = 1$  e as métricas:  $(+, -, -, -)$  e  $(+, -)$ , respectivamente para  $(3+1)$  e  $(1+1)$  dimensões do espaço-tempo.

## Capítulo 2

# Extensão da eletrodinâmica com operadores de dimensão-cinco

Considere a densidade Lagrangeana de Maxwell com um operador de dimensão-cinco ao longo de quadri-vetor constante proposto por Myers-Pospelov:

$$\mathcal{L}_{MP} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + gn^\mu F_{\mu\beta}(n \cdot \partial)n_\alpha \tilde{F}^{\alpha\beta}, \quad (2.1)$$

onde,  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  é o tensor intensidade de campo eletromagnético e  $\tilde{F}^{\alpha\beta} = (1/2)\varepsilon^{\alpha\beta\lambda\rho}F_{\lambda\rho}$  o seu tensor dual do campo de calibre (simetria  $U(1)$ ). E ainda,  $g = \xi/M_P$ , com  $\xi$  sendo um parâmetro adimensional limitado pela escala de Planck,  $M_P$ . Em quatro dimensões do espaço-tempo, a análise dimensional da Lagrangeana (2.1) é dada em unidades de massa como

$$[A_\mu] = M, \quad [\partial_\mu] = M, \quad [n_\mu] = M^0, \quad [F_{\mu\nu}] = M^2. \quad (2.2)$$

Então, temos que o primeiro e o segundo termos de (2.1) correspondem aos operadores de dimensão-quatro e de dimensão-cinco, respectivamente. Note também que o termo adicional em (2.1) que insere a VIL é construído baseado nos seguintes critérios: *i*) quadrático nos campos; *ii*) número de derivadas a mais do que a do termo cinético usual; *iii*) invariante diante a transformação de calibre:  $A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \Lambda$ ; *iv*) não redutível para operadores de baixa dimensão pela equação de movimento; *v*) não redutível para uma derivada total. As condições *ii*) e *v*) garantem que operadores desse tipo conduzam a modificações cúbicas na relação de dispersão. Neste capítulo, estudamos os efeitos da VIL sobre as equações de movimento e nos modos de propagação das ondas eletromagnéticas.

## 2.1 As equações de Maxwell modificadas

Considerando a Lagrangeana dada por (2.1) de modo que ela seja escrita na presença de uma fonte externa  $j^\mu$ , as equações de movimento devem ser obtidas quando associadas as seguintes equações de Euler-Lagrange modificadas:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\alpha} = \partial_\sigma \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\sigma A_\alpha)} - \partial_\rho \partial_\sigma \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\rho \partial_\sigma A_\alpha)}. \quad (2.3)$$

Assim, devemos obter

$$\begin{aligned} \partial_\sigma F^{\sigma\alpha} - \frac{g}{2} [(n^\rho \partial_\rho)^2 n_\beta \varepsilon^{\beta\alpha\gamma\lambda} F_{\gamma\lambda} - n^\alpha n^\rho \partial_\rho n_\beta \varepsilon^{\beta\sigma\gamma\lambda} \partial_\sigma F_{\gamma\lambda}] + \\ - \frac{g}{2} (n^\rho \partial_\rho)^2 n_\beta \varepsilon^{\beta\alpha\nu\sigma} F_{\nu\sigma} = j^\alpha. \end{aligned} \quad (2.4)$$

E, considerando que  $n^\alpha n^\rho \partial_\rho n_\beta \varepsilon^{\beta\sigma\gamma\lambda} \partial_\sigma F_{\gamma\lambda} = 0^1$ , temos que (2.4) deve se reduzir a forma:

$$\partial_\sigma F^{\sigma\alpha} + g(n^\rho \partial_\rho)^2 n_\beta \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\lambda} F_{\gamma\lambda} = j^\alpha. \quad (2.5)$$

Notando que os campos elétricos e magnéticos são descritos através de  $F_{0i} = -E_i$  e  $F_{ij} = -\varepsilon_{ijk} B^k$ , ao mesmo tempo que  $n_\mu = (n_0, \vec{n})$  e  $j^\mu = (\rho, \vec{j})$ , isso nos possibilita a reescrever a equação (2.5), primeiro para o caso em que  $\alpha = 0$ :

$$\nabla \cdot \vec{E} + 2g(n \cdot \partial)^2 (\vec{n} \cdot \vec{B}) = \rho, \quad (2.6)$$

e, depois para  $\alpha = i$ :

$$-\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \nabla \times \vec{B} + 2g(n \cdot \partial)^2 (n_0 \vec{B} - (\vec{n} \times \vec{E})) = \vec{j}. \quad (2.7)$$

De fato, as equações de Maxwell com fontes são modificadas devido aos efeitos da VIL. Por outro lado, o grupo das equações de Maxwell livre de fontes não são afetadas pela VIL. Em particular, quando o quadri-vetor constante é tipo-tempo,  $n_\mu = (n_0, \vec{0})$ , temos que apenas a lei de Ampère-Maxwell regida pela equação (2.7) é modificada com um campo magnético, constituinte nos efeitos da VIL. E quando o quadri-vetor constante é tipo-espaço,  $n_\mu = (0, \vec{n})$  temos que ambas as leis de Gauss e Ampère-Maxwell, regidas pela equações (2.6) e (2.7) são afetadas, tal que os campos elétrico e magnético aparecem

<sup>1</sup>Explorando a identidade de Bianchi,  $\partial_\sigma F_{\gamma\lambda} + \partial_\gamma F_{\lambda\sigma} + \partial_\lambda F_{\sigma\gamma} = 0$ , trocando os índices  $\lambda \Rightarrow \gamma$  e  $\gamma \Rightarrow \lambda$  no último termo da esquerda para direita e utilizando a propriedade anti-simétrica do tensor de intensidade de campo eletromagnético, os dois últimos termos se cancelam, ficando apenas com  $\partial_\sigma F_{\gamma\lambda} = 0$ .

como ingredientes da VIL de forma diferentes. Esse quadro pode ser melhor observado nas tabelas a seguir:

Tabela 1- A equação (2.6) para os cenários tipo-tempo e tipo-espaço	
tipo-tempo ( $n_\mu = (n_0, \vec{0})$ )	tipo-espaço ( $n_\mu = (0, \vec{n})$ )
$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} + 2g(\vec{n} \cdot \vec{\partial})^2(\vec{n} \cdot \vec{B}) = \rho$

No caso de (2.7), haverá modificações nos três cenários prévios, o que mais uma vez é interpretado como quebra de covariância da teoria (ver tabela 2).

Tabela 2- A equação (2.7) para os cenários tipo-tempo e tipo-espaço	
tipo-tempo ( $n_\mu = (n_0, \vec{0})$ )	tipo-espaço ( $n_\mu = (0, \vec{n})$ )
$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + 2gn_0^3(\partial_0^2 \vec{B}) = \vec{J}$	$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - 2g(\vec{n} \cdot \vec{\partial})^2(\vec{n} \times \vec{E}) = \vec{J}$

## 2.2 Modos de propagação das ondas eletromagnéticas

Os modos de propagação das ondas eletromagnéticas são naturalmente descritos pela a relação de dispersão associada. Neste sentido, a relação de dispersão, pode ser obtida a partir de (2.5) na ausência de fontes. No calibre de Lorentz ( $\partial \cdot A = 0$ ), temos

$$(\square \eta^{\alpha\lambda} + 2g(n \cdot \partial)^2 n_\beta \varepsilon^{\alpha\beta\delta\lambda} \partial_\delta) A_\lambda = 0, \quad (2.8)$$

a qual associada a solução de ondas planas:  $A_\lambda = A(k)e^{-ik \cdot x}$ , obtemos

$$\hat{\Theta}^{\alpha\lambda} A_\lambda(k) = 0, \quad (2.9)$$

com  $\hat{\Theta}^{\alpha\lambda} = (-\eta^{\alpha\lambda} k^2 - 2i g(n \cdot k)^2 n_\beta \varepsilon^{\alpha\beta\delta\lambda} k_\delta)$ . Por definição, a relação de dispersão é uma quantidade determinada pelo determinante do operador associado a equação (2.9). Isto pode ser obtido, primeiro multiplicando a equação (2.9) pelo operador auxiliar:  $\hat{\Theta}_{\alpha\sigma} = (-\eta_{\alpha\sigma} k^2 - 2i g(n \cdot k)^2 n^\mu \varepsilon_{\alpha\mu\nu\sigma} k^\nu)$  tal que

$$((k^2)^2 - 4g^2(n \cdot k)^4 ((n \cdot k)^2 - k^2 n^2)) \delta_\sigma^\lambda A_\lambda(k) = 0. \quad (2.10)$$

Concluimos que a relação de dispersão covariante é dada por,

$$(k^2)^2 - 4g^2(n \cdot k)^4 ((n \cdot k)^2 - k^2 n^2) = 0. \quad (2.11)$$

Por simplicidade, consideramos (2.11) apenas para os efeitos da VIL atribuídos aos regimes isotrópicos:  $n_\mu = (n_0, \vec{0})$ , sentidos pelas ondas eletromagnéticas. Isto implica em

$$(k^2)^2 - 4g^2 k_0^4 |\vec{k}|^2 n_0^6 = 0. \quad (2.12)$$

Note que a equação (2.12) pode ser resolvida através de soluções por frequências  $k_\mu = (\omega, \vec{k})$  cujo o resultado é dado na forma:

$$\omega_\lambda(\vec{k}) = \frac{|\vec{k}|}{\sqrt{1 + 2g\lambda|\vec{k}|n_0^3}}, \quad (2.13)$$

com duas polarizações  $\lambda = \pm 1$ . A solução, (2.13), deve recuperar corretamente a forma usual no limite em que  $g \rightarrow 0$ . Note também que os modos de propagação da onda eletromagnética associados a (2.13) são descritos pela seguinte velocidade de grupo:

$$v_g(\vec{k}) = \frac{\partial \omega_\lambda}{\partial |\vec{k}|} = \frac{1 + g\lambda|\vec{k}|}{(1 + 2g\lambda|\vec{k}|n_0^3)^{3/2}}, \quad (2.14)$$

Por outro lado, a velocidade de fase que é dado por

$$v_f = \frac{\omega_\lambda}{|\vec{k}|} = \frac{1}{\sqrt{1 + 2g\lambda|\vec{k}|n_0^3}}. \quad (2.15)$$

Para analisarmos a relação entre a velocidade de fase e a velocidade de grupo dos fótons usamos a fórmula de Rayleigh  $\frac{v_f}{v_g} = 1 - \frac{\omega}{v_f} \left( \frac{dv_f}{d\vec{k}} \right)$ , ou seja,

$$\begin{aligned} \frac{v_f - v_g}{v_g} &= \frac{g\lambda\vec{k}n_0^3}{(1 + 2g\lambda\vec{k}n_0^3)^{3/2}}, \\ &\approx g\lambda\vec{k}n_0^3, \end{aligned} \quad (2.16)$$

onde expandimos o denominador e desprezamos os termos de segunda ordem em  $g$ . Analisando a equação anterior para  $\lambda = +1$ , temos o caso subluminal, em que  $v_f > v_g$  uma dispersão média normal, e para  $\lambda = -1$  temos o caso superluminal, isto implica que a  $v_g > v_f$  que ocasiona uma anomalia na dispersão pela influência de efeitos anisotrópicos. Portanto, podemos concluir que o modelo verdadeiramente isotrópico deve ser atribuído apenas para o caso subluminal ( $\lambda = +1$ ).

# Capítulo 3

## Campos escalares de Myers-Pospelov em (1+1) dimensões

Neste capítulo, estudamos primeiramente a geração de uma teoria bi-dimensional fruto de uma redução dimensional da eletrodinâmica de Myers-Pospelov (2.1), associada a um processo de projeção dimensional de 4D para 2D do espaço-tempo. Neste ponto, focamos em um modelo de baixa dimensionalidade parametrizado por operadores de altas ordens derivativas. Usaremos como base a referência [14], para mais sobre redução dimensional via projeção dimensional ver [17, 18] onde os autores realizaram a projeção do modelo Chern-Simons com VIL de 4D para 3D.

### 3.1 Projeção dimensional 4D-2D

Nesta seção, estudamos o processo de projeção dimensional da teoria de calibre de Myers-Pospelov em 4D para uma teoria em 2D. Primeiramente, a contribuição de Maxwell assume a forma:

$$-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -\frac{1}{4}(F_{ij}F^{ij} + 2F_{0a}F^{0a} + 2F_{3a}F^{3a} + F_{ab}F^{ab}). \quad (3.1)$$

Na nossa nomenclatura, renomeamos  $i, j = 0, 3$  e  $a, b = 1, 2$  de tal maneira que a propriedade anti-simétrica do tensor eletromagnético é preservada:  $F_{a0} = -F_{0a}$  e  $F_{a3} = -F_{3a}$ . Então, o processo de redução dimensional se realiza de forma simples. Inicialmente, desmembramos o quadri-vetor potencial  $A^\mu = (A^0, A^1, A^2, A^3)$  para depois congelar duas das três coordenadas espaciais, isto quer dizer que  $\partial_1 = \partial_2 = 0$  quando estão atuando em qualquer componente do quadri-potencial (portanto  $F_{ab} = 0$ ). Neste caso, temos que a

equação (3.1) reduz para,

$$-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -\frac{1}{4}(F_{ij}F^{ij} + 2\partial_0 A_a \partial^0 A^a + 2\partial_3 A_a \partial^3 A^a), \quad (3.2)$$

pela métrica adotada:  $(+, -, -, -)$ , constatamos que  $A^a = -A_a$ . Agora reescrevendo  $A_1 = \phi$  e  $A_2 = \chi$ , finalizamos essa primeira parte com

$$-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -\frac{1}{4}F_{ij}F^{ij} + \frac{1}{2}\partial_i \phi \partial^i \phi + \frac{1}{2}\partial_i \chi \partial^i \chi. \quad (3.3)$$

Note portanto que o termo acima comporta a parte de Maxwell e dois campos escalares sem massa numa teoria bi-dimensional.

Vamos agora direcionar as discussões para a contribuição de Myers-Pospelov. Diante das mesmas condições descritas acima, temos

$$g(n \cdot \partial)^2 A_\nu n_\mu \varepsilon^{\mu\rho\sigma\nu} \partial_\rho A_\sigma = g(n_i \partial^i + n_a \partial^a)^2 (A_\nu n_i \varepsilon^{ij\sigma\nu} \partial_j A_\sigma + A_\nu n_a \varepsilon^{a\rho\sigma\nu} \partial_\rho A_\sigma). \quad (3.4)$$

Ou ainda,

$$g(n \cdot \partial)^2 A_\nu n_\mu \varepsilon^{\mu\rho\sigma\nu} \partial_\rho A_\sigma = g(n_i \partial^i + n_a \partial^a)^2 (\varepsilon^{ij} n_i \chi \partial_j \phi + \varepsilon^{a\rho\sigma} n_a (\partial_i A_\rho) A_\sigma), \quad (3.5)$$

com  $\varepsilon^{ij12} = \varepsilon^{ij}$ . Observe que o termo  $\varepsilon^{ij} n_i \chi \partial_j \phi$  em (3.5) é o mais significativo por se apresentar apenas em termos dos campos escalares e de suas derivadas. O segundo termo mistura campos vetoriais e campos escalares, porém por simplicidade devemos desconsiderá-lo. Neste sentido, consideramos que  $n_a = 0$ , tal que

$$g(n \cdot \partial)^2 A_\nu n_\mu \varepsilon^{\mu\rho\sigma\nu} \partial_\rho A_\sigma = g n_i \varepsilon^{ij} (n_j \partial^j)^2 \chi \partial_j \phi, \quad (3.6)$$

observamos pela equação acima, devido ao processo que reduziu a dimensão do modelo, que o operador não é de ordem cinco, mas claramente foi reduzido para terceira ordem. Além disso, nota-se que a equação para este caso é totalmente composta por campos escalares e suas derivadas.

Finalmente, concluímos que a projeção da densidade lagrangeana de Maxwell adicionada do termo de Myers-Pospelov de 4D para 2D é dada por :

$$\mathcal{L}_{2D} = -\frac{1}{4}F_{ij}F^{ij} + \frac{1}{2}\partial_i \phi \partial^i \phi + \frac{1}{2}\partial_i \chi \partial^i \chi + g n_i \varepsilon^{ij} (n_j \partial^j)^2 \chi \partial_j \phi. \quad (3.7)$$

Esta teoria resultante é construída por campos bi-dimensionais vivendo num espaço-tempo quadri-dimensional. O novo termo refere-se como modelo de Myers-Pospelov escalar em

2D.

### 3.2 Modelo de Myers-Pospelov escalar em (1+1)dimensões

De acordo com o termo previamente projetado de uma teoria em 4D para uma outra teoria em 2D, nesta seção introduzimos uma nova teoria de campos com dois campos reais com uma dinâmica em altas ordens derivativas devido a VIL. Desta forma, temos

$$\mathcal{L}_{2D} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + \frac{1}{2}\partial_\mu\chi\partial^\mu\chi + g\varepsilon^{\mu\nu}n_\mu(n\cdot\partial)^2\chi\partial_\nu\phi, \quad (3.8)$$

onde  $\mu = \nu = 0, 1$  e  $n_\mu = (n_0, n_1)$ . As equações de movimento associada a lagrangeana (3.8), devido aos campos escalares  $\phi$  e  $\chi$  são dadas respectivamente,

$$\begin{aligned} \square\phi + g\varepsilon^{\mu\nu}n_\mu(n\cdot\partial)^2\partial_\nu\chi &= 0, \\ \square\chi - g\varepsilon^{\mu\nu}n_\mu(n\cdot\partial)^2\partial_\nu\phi &= 0, \end{aligned} \quad (3.9)$$

onde usamos  $\square = \partial_\mu\partial^\mu$  que é o operador D'Alambertiano. Note que as equações acima dependem da escolha do tensor de fundo  $n_\mu$ , portanto elas podem mudar se  $n_\mu$  for puramente tipo-tempo, tipo-espaco ou tipo-luz.

Neste ponto, pretendemos obter a relação de dispersão que descreverá as propagações dos campos  $\phi$  e  $\chi$  devido as equações de movimento descrita acima. Considere primeiro, as soluções de ondas planas:  $\phi(x) = \tilde{\phi}(p)e^{-ip\cdot x}$  e  $\chi(x) = \tilde{\chi}(p)e^{-ip\cdot x}$  para aplicar em (3.9) independentemente. Assim, encontramos

$$\begin{pmatrix} p^2 & -ig\varepsilon^{\mu\nu}n_\mu(n\cdot p)^2p_\nu \\ ig\varepsilon^{\mu\nu}n_\mu(n\cdot p)^2p_\nu & p^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\phi}(p) \\ \tilde{\chi}(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

Através do determinante da matriz associada a equação (3.10), reproduziremos a seguinte relação de dispersão covariante:

$$p^2 - \lambda g\varepsilon^{\mu\nu}n_\mu(n\cdot p)^2p_\nu = 0, \quad (3.11)$$

onde  $\lambda = \pm 1$  que define o caráter birrefringente para o sistema. Quando comparamos a relação de dispersão (3.11), com a relação de dispersão devido a termos de Myers-Pospelov original (2.11), notamos que sua estrutura não deve mudar, pelo menos, para o

caso isotrópico ( $n_\mu = (n_0, \vec{0})$ ).

# Capítulo 4

## Defeitos topológicos: Soluções particulares

Quando realizamos a redução dimensional do modelo, havia a perspectiva apontada por Brito e colaboradores [14] de investigar a presença de soluções de defeitos topológicos no setor escalar, com isso, iremos introduzir um procedimento analítico com o intuito de obtermos soluções que caracterizem defeitos topológicos [19, 20, 21], de modo a satisfazer as equações de movimento (3.9), que nessa ocasião é controlada por um potencial:

$$\begin{aligned}\square\phi + g\varepsilon^{\mu\nu}n_\mu(n \cdot \partial)^2\partial_\nu\chi + V_\phi &= 0, \\ \square\chi - g\varepsilon^{\mu\nu}n_\mu(n \cdot \partial)^2\partial_\nu\phi + V_\chi &= 0,\end{aligned}\tag{4.1}$$

onde  $V_\phi = \partial V(\phi, \chi)/\partial\phi$  e  $V_\chi = \partial V(\phi, \chi)/\partial\chi$ . Como podemos observar em (4.1), o modelo de Myers-Pospelov compactado para duas dimensões, carrega as altas ordens derivativas que impõem várias dificuldades para se obter soluções analíticas. A seguir iremos usar um *Ansatz*<sup>1</sup> tipo-*kink*<sup>2</sup> para explorar uma versão particular das equações de movimento. Os conjuntos de equações associadas a cada configuração do quadri-vetor,  $n_\mu$ , se é tipo-tempo, tipo-espaço e tipo-luz são dadas a seguir:

- Caso tipo-tempo  $n_\mu = (1, \vec{0})$ :

$$\ddot{\phi} - \phi'' + g\ddot{\chi}' + V_\phi = 0,\tag{4.2a}$$

$$\ddot{\chi} - \chi'' - g\ddot{\phi}' + V_\chi = 0.\tag{4.2b}$$

---

<sup>1</sup>*Ansatz* é uma palavra de origem alemã que é entendida como um chute.

<sup>2</sup>soluções tipo-*kink* são soluções topológicas por terem limites assintóticos diferentes, onde conectam os diferentes mínimos do potencial.

- Caso tipo-espaco  $n_\mu = (0, n_1 = -1)$ :

$$\ddot{\phi} - \phi'' + g\dot{\chi}'' + V_\phi = 0, \quad (4.3a)$$

$$\ddot{\chi} - \chi'' - g\dot{\phi}'' + V_\chi = 0. \quad (4.3b)$$

- Caso tipo-luz  $n_\mu = (1, n_1 = -1)$ :

$$\ddot{\phi} - \phi'' + g(\ddot{\chi} + 3\dot{\chi}' + 3\dot{\chi}'' + \chi''') + V_\phi = 0, \quad (4.4a)$$

$$\ddot{\chi} - \chi'' - g(\ddot{\phi} + 3\dot{\phi}' + 3\dot{\phi}'' + \phi''') + V_\chi = 0. \quad (4.4b)$$

Iremos trabalhar com um caso especial, em que o potencial depende apenas do campo  $\phi$ , ou seja,  $V = V(\phi)$ . Deste modo, as equações anteriores relativas à dinâmica do campo  $\chi$  podem ser reescritas como

$$\ddot{\chi} - \chi'' - g\dot{\phi}' = 0, \quad \text{tipo-tempo} \quad (4.5)$$

$$\ddot{\chi} - \chi'' - g\dot{\phi}'' = 0, \quad \text{tipo-espaco} \quad (4.6)$$

$$\ddot{\chi} - \chi'' - g(\ddot{\phi} + 3\dot{\phi}' + 3\dot{\phi}'' + \phi''') = 0. \quad \text{tipo-luz} \quad (4.7)$$

Utilizando um *Ansatz* tipo-*kink* para o campo  $\phi$ , temos

$$\phi(x, t) = \tanh(kx + \omega t), \quad (4.8)$$

tal solução estabelece os seguintes vínculos:

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= \omega(1 - \phi^2), & \phi' &= k(1 - \phi^2), \\ \ddot{\phi} &= -2\omega^2(1 - \phi^2)\phi, & \phi'' &= -2k^2(1 - \phi^2)\phi, & \dot{\phi}' &= -2\omega k(1 - \phi^2)\phi, \\ \ddot{\phi}' &= 6\omega^2 k \phi^2(1 - \phi^2) - 2\omega^2 \phi', & \dot{\phi}'' &= 6\omega k^2 \phi^2(1 - \phi^2) - 2\omega k \phi', \\ \ddot{\phi} &= 6\omega^3 \phi^2(1 - \phi^2) - 2\omega^2 \dot{\phi}, & \phi''' &= 6k^3 \phi^2(1 - \phi^2) - 2k^2 \phi', \end{aligned} \quad (4.9)$$

as quais deverão ser satisfeitas por (4.8). Agora vamos considerar uma função  $\chi$  descrita por

$$\chi = f(\phi) = \frac{\phi^2}{2}, \quad (4.10)$$

como uma conexão entre ambos os campos  $\phi$  e  $\chi$  que pode ser aplicada em conjunto com (4.9) e analisar cada uma das diferentes configurações de quebra. Primeiro vamos tomar

as derivadas referentes a (4.10) (de acordo com a equação (4.8)) de modo a obter

$$\begin{aligned}
\chi' &= \phi k(1 - \phi^2), & \dot{\chi} &= \phi \omega(1 - \phi^2), \\
\chi'' &= k^2(1 - \phi^2) - 3k^2\phi^2(1 - \phi^2), & \ddot{\chi} &= \omega^2(1 - \phi^2) - 3\omega^2\phi^2(1 - \phi^2), \\
\dot{\chi}'' &= -8\omega k^2\phi(1 - \phi^2) + 12\omega k^2\phi^3(1 - \phi^2), & \ddot{\chi}' &= -8\omega^2\phi\phi' + 12k\omega^2\phi^3(1 - \phi^2), \\
\chi''' &= -8k^3\phi(1 - \phi^2) + 12k^3\phi^3(1 - \phi^2), & \ddot{\chi} &= -8\omega^3\phi(1 - \phi^2) + 12\omega^3\phi^3(1 - \phi^2).
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Agora com os dois conjuntos de equações dados pelas equações (4.9) e (4.11), iremos estudar as equações de movimento para cada cenário do quadri-vetor:  $n_\mu$ , com intuito de encontrar certas soluções particulares.

## 4.1 Regime tipo-tempo

Fazendo uso das equações (4.9) e (4.11), em (4.2a), obtemos :

$$\begin{aligned}
-2\omega^2(1 - \phi^2)\phi - \phi'' + g(-8\omega^2\phi\phi' + 12k\omega^2\phi^3(1 - \phi^2)) + V_\phi &= 0, \\
-\phi'' - 8g\omega^2\phi\phi' &= 0,
\end{aligned} \tag{4.12}$$

que foi reescrita como uma equação de Burgers<sup>3</sup>, para isto ser verdade teremos que a derivada do potencial em relação a  $\phi$  deverá ser:

$$V_\phi = 2\omega^2(1 - \phi^2)\phi - 12gk\omega^2\phi^3(1 - \phi^2), \tag{4.13}$$

portanto, substituindo o *Ansatz* (4.8) na equação (4.12), temos:

$$\begin{aligned}
2k^2(1 - \phi^2)\phi - 8g\omega^2\phi(1 - \phi^2) &= 0 \\
k^2 - 4g\omega^2k &= 0 \\
k(k - 4g\omega^2) &= 0 \\
k &= 4g\omega^2,
\end{aligned} \tag{4.14}$$

---

<sup>3</sup>As equações de Burgers, elaborada por Johannes Martinus Burgers(1895-1981), são consideradas como uma forma simplificada das equações de Navier-Stokes, da forma,  $u_t + Auu_x - \mu u_{xx}$ , onde  $A$  controla a não linearidade e  $\mu$  é a viscosidade padrão, esta equação foi introduzida inicialmente para descrever turbulências de um fluido em uma única dimensão espacial [27],[28].

que é a relação de dispersão, onde precisamos determinar o valor de  $\omega$ , para isso vamos substituir as derivadas dos campos em (4.5), assim;

$$\omega = \pm(2\sqrt{2g})^{-1}, \quad (4.15)$$

por conseguinte, com os valores de  $k$  e  $\omega$  obtidos, se faz possível determinar a forma do potencial integrando a equação (4.13), ou seja;

$$V(\phi) = \frac{\phi^2}{8g^2}(1 - \phi^2)^2, \quad (4.16)$$

## 4.2 Regime tipo-espaço

Procedendo analogamente ao regime tipo-tempo, substituímos (4.8) em (4.3a), para obtermos;

$$-\phi'' - 8g\omega k\phi\phi' = 0, \quad (4.17)$$

a equação anterior ficará análoga a uma equação de Burgers, se a derivada do potencial em relação a  $\phi$  for,

$$V_\phi = 2\omega^2(1 - \phi^2)\phi - 12g\omega k^2\phi^3(1 - \phi^2), \quad (4.18)$$

então de (4.17), pode-se obter o valor de  $\omega$  com o auxílio de (4.9),

$$\omega = (4g)^{-1}, \quad (4.19)$$

e conseqüentemente a partir da equação (4.6), substituindo as derivadas é possível obter o valor de  $k$ ,

$$k = \pm(2\sqrt{2g})^{-1}, \quad (4.20)$$

com os valores de  $\omega$  e  $k$  para o tipo-espaço definidos, pode-se determinar o potencial integrando (4.18), assim

$$V(\phi) = \frac{\phi^2}{16g^2}(1 - \phi^2)^2. \quad (4.21)$$

## 4.3 Regime tipo-luz

Substituindo o *Ansatz* para as equações no cenário tipo-luz, obteremos algumas estabilidades nas soluções, para evitarmos essas estabilidades modificaremos a equação de movimento (4.4), para chegarmos em uma solução aceitável. Primeiro substituindo o

*Ansatz* na equação para o campo  $\phi$ , irá se reduzir a

$$-\phi'' - 8g(k^2 + 3\omega k + 3\omega^2)\phi\phi' = 0, \quad (4.22)$$

a equação anterior ficará análoga a uma equação de Burgers, se a derivada do potencial em relação a  $\phi$  for

$$\begin{aligned} V_\phi = & 2\omega^2(1 - \phi^2)\phi - 12gk^3\phi^3(1 - \phi^2) - 36g\omega k^2\phi^3(1 - \phi^2) \\ & - 36g\omega^2 k\phi^3(1 - \phi^2) - 12g\omega^3\phi^3(1 - \phi^2) + 8\omega^3\phi(1 - \phi^2). \end{aligned} \quad (4.23)$$

Voltando para a equação (4.22), substituindo as derivadas  $\phi'' = -2k^2\phi(1 - \phi^2)$ ,  $\phi' = k(1 - \phi^2)$ , ficamos com,

$$k^2(1 - 4gk) + 12\alpha g(\omega^2 + \omega k)k = 0 \quad (4.24)$$

onde  $\alpha$  é um parâmetro que será obtido, manipulando a equação (4.7), para o campo  $\chi$  livre de potencial, substituindo as derivadas em (4.7) evidenciamos

$$\omega^2 - k^2 + g(2\omega^3 + 6\omega^2 k + 6\omega k^2 + 2k^3) = 0, \quad (4.25)$$

cujas soluções são,

$$\omega_{\pm} = \frac{-1 - 4gk \pm \sqrt{1 + 16gk}}{4g}, \quad (4.26)$$

com o resultado anterior, substituimos  $\omega_+$  com  $k \equiv \frac{-1+\beta^2}{16g}$  na equação (4.24), obtemos

$$\alpha = -\frac{(1 + \beta)(\beta^2 + 5)}{12(\beta - 3)(\beta - 1)}, \quad (4.27)$$

então para  $\beta = 2$ ,  $\alpha = -1/4$  e  $k = 3/16g$ , logo  $\omega = 1/16g$ , e substituindo o valor de  $\alpha$  na equação (4.24) ficamos com,

$$2k^2 - g(8k^2 + 6\omega^2 + 6\omega k)k = 0 \quad (4.28)$$

onde essa equação inicialmente tinha a forma,

$$2k^2 - g(8k^2 + 24\omega^2 + 24\omega k)k = 0, \quad (4.29)$$

logo temos que somar e subtrair  $18g\omega^2 + 18g\omega k$  dentro dos parênteses para chegar em (4.28), onde a parte positiva é colocada dentro de  $V_\phi$  que ficará

$$V_\phi = 2\phi(\phi^2 - 1) [6gk^3\phi^2 + 9gk^2\omega(\phi^2 - 1) + \omega^2(9gk(\phi^2 - 1) - 1) + 2g\omega^3(3\phi^2 - 2)]. \quad (4.30)$$

Conseqüentemente, analisando a equação (4.28), com o auxílio de (4.8), determinamos a relação de dispersão,

$$k_\pm = \frac{1 - 3g\omega \pm \sqrt{1 - 39g^2\omega^2 - 6g\omega}}{8g}, \quad (4.31)$$

além disso, (4.7) apresenta as seguintes restrições,  $\omega_1 = -(4g)^{-1}$  para  $k_1 = (4g)^{-1}$ , e  $\omega_2 = (16g)^{-1}$  para  $k_2 = 3(16g)^{-1}$ , para que o potencial seja realmente nulo, assim substituindo os valores de  $\omega_1$  e  $k_1$  em (4.30) o resultado  $V_\phi = 0$ , por outro lado, os parâmetros  $\omega_2$  e  $k_2$  resultam em,

$$\frac{\partial V}{\partial \phi} = \frac{3\phi^5 - 4\phi^3 + \phi}{16g^2}, \quad (4.32)$$

cuja integração nos leva a

$$V_2(\phi) = \frac{\phi^2}{32g^2}(1 - \phi^2)^2. \quad (4.33)$$

## 4.4 Análises Gráficas

Uma interessante característica a respeito desta abordagem é que as equações (4.12), (4.17) e (4.22) podem ser vistas como equações de Burgers [27],[28] para ondas com baixas velocidades.

Algumas soluções que satisfazem as equações de Burgers, podem apresentar a propriedade de serem quirais, o que significa que estas ondas se propagam com o sinal bem definido para suas velocidades [29]. Para analisarmos se as equações apresentam uma propagação quiral, plotamos os gráficos da função  $\phi(x, t) = \tanh(kx + \omega t)$  com os valores de  $k$  e  $\omega$  obtidos em cada cenário, onde foi observado que apenas as soluções tipo-espaço e tipo-luz apresentam um comportamento quiral, como pode ser visualizado na Figura (4.1).

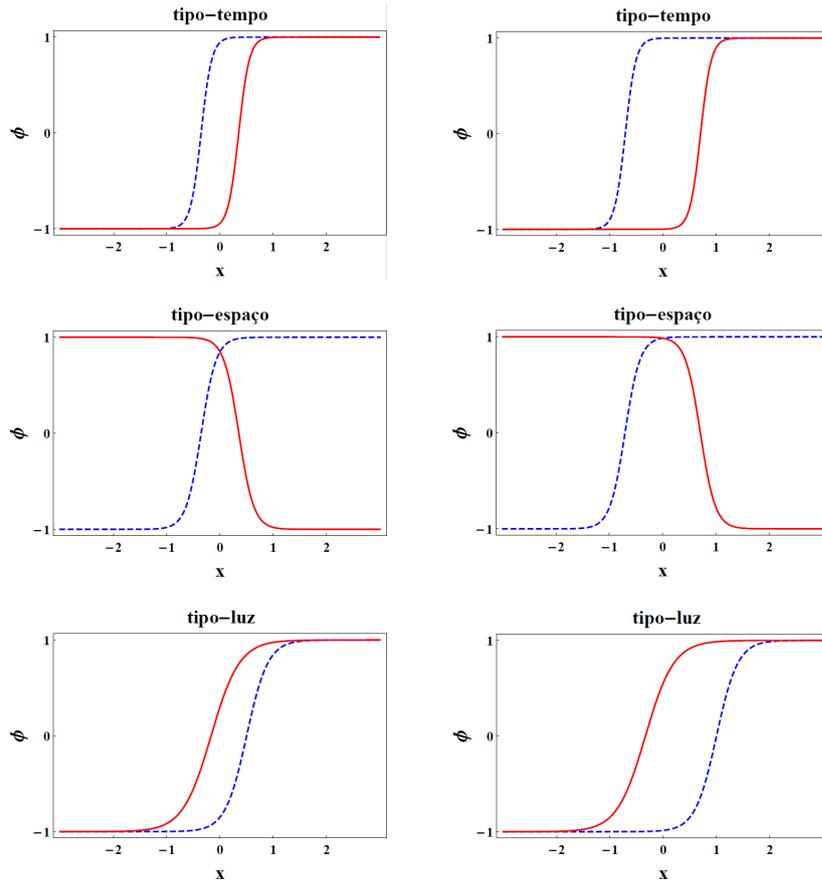


Figura 4.1: O campo  $\phi$  para os cenários tipo-tempo, tipo-espaço e tipo-luz, com  $g = 0.1$ . A evolução temporal ( $t = 0,5$  a esquerda e  $t = 1$  a direita) das soluções, mostram o comportamento quiral para as soluções tipo-espaço e tipo-luz.

O gráfico foi plotado  $t = 0.5$  a esquerda para cada cenário, e após uma evolução temporal em  $t = 1$  a direita para cada cenário, a curva tracejada em azul mostra o comportamento da função  $\phi$  para  $k$  e  $\omega_+$  para o tipo-tempo,  $k_+$  e  $\omega$  para o tipo-espaço e  $k_1$  e  $\omega_1$  para o tipo-luz. Além disso a curva em vermelho mostra o comportamento da função  $\phi$  para  $k$  e  $\omega_-$  para o tipo-tempo,  $k_-$  e  $\omega$  para o tipo-espaço e  $k_2$  e  $\omega_2$  para o tipo-luz. É importante notar que as relações de dispersão encontradas mostram que  $\omega$  e  $k$  dependem do parâmetro de intensidade de violação da invariância de Lorentz  $g$  que é uma demonstração clara que os campos  $\phi$  e  $\chi$  são sensíveis a violação da invariância de Lorentz.

# Capítulo 5

## Defeitos topológicos: Soluções gerais analíticas

No capítulo anterior elaboramos soluções particulares para as equações de movimento (3.9), porém é relevante procurarmos por conjuntos gerais de campos que possam satisfazer as equações de movimento de um modo mais natural, para o modelo estático e para o modelo dependente do tempo (ondas viajantes), como veremos a seguir,

### 5.1 Modelo estático

Para uma análise de defeitos estáticos em uma dimensão, onde os campos se caracterizam por  $\phi = \phi(x)$  e  $\chi = \chi(x)$ , as equações (4.2) e (4.3) assumem a forma,

$$-\phi'' + V_\phi = 0; \quad -\chi'' + V_\chi = 0, \quad (5.1)$$

estas são equações de movimento de dois campos escalares padrão, e que apresentam soluções linearmente estáveis [31], no entanto as equações para o tipo-luz Eq.(4.4) que são reescritas como,

$$\begin{aligned} -\phi'' + g\chi''' + V_\phi &= 0 \\ -\chi'' - g\phi''' + V_\chi &= 0, \end{aligned} \quad (5.2)$$

preservando os termos de alta ordem derivativa, o que acarretará várias dificuldades no âmbito de obtermos uma solução para a equação de movimento. O sistema de equações diferenciais anterior pode ser integrado uma vez, tal procedimento de integração, consiste em multiplicar a primeira equação por  $\phi'$  e a segunda por  $\chi'$  e então somando-as, obtemos

$$-\phi''\phi' - \chi''\chi' + g\chi'''\phi' - g\phi'''\chi' + V_\phi\phi' + V_\chi\chi' = 0, \quad (5.3)$$

que por sua vez, pode ser reescrita como

$$\frac{dV(\phi, \chi)}{dx} = \frac{d}{dx} \left( \frac{\phi'^2}{2} \right) + \frac{d}{dx} \left( \frac{\chi'^2}{2} \right) - g \frac{d}{dx} (\chi'' \phi' - \phi'' \chi'). \quad (5.4)$$

Ao integrarmos diretamente a equação anterior em relação a variável  $x$ , obtemos diretamente

$$V(\phi, \chi) = \frac{\phi'^2}{2} + \frac{\chi'^2}{2} - g(\chi'' \phi' - \phi'' \chi'). \quad (5.5)$$

Como inspiração para estabelecermos um *Ansatz* adequado para o formalismo prévio, é interessante nos espelharmos no modelo de VIL estudado por Barreto e colaboradores em [23], onde os autores resolveram as seguintes equações de movimento,

$$\phi'' + g\chi' = V_\phi, \quad \chi'' + g\phi' = V_\chi, \quad (5.6)$$

repetindo o procedimento de primeira integração, o potencial resultante é,

$$V(\phi, \chi) = \frac{\phi'^2}{2} + \frac{\chi'^2}{2}. \quad (5.7)$$

Em sua investigação, Barreto et al. consideraram que as equações de movimento (5.6) poderiam ser resolvidas a partir de soluções que satisfazem as seguintes equações diferenciais de primeira ordem,

$$\phi' = W_\phi(\phi, \chi) + s_1 \chi; \quad \chi' = W_\chi(\phi, \chi) + s_2 \phi, \quad (5.8)$$

onde  $s_1$  e  $s_2$  são constantes reais e  $W_\phi$  e  $W_\chi$  são derivadas de um superpotencial<sup>1</sup>. Assim, substituindo (5.8) nas equações (5.6) e (5.7), verifica-se que as equações de primeira ordem para os campos  $\phi$  e  $\chi$  satisfazem a equação de movimento se  $g = s_2 - s_1$ . Contudo, podemos nos perguntar, qual a razão específica por traz do formalismo de primeira ordem proposto por Barreto ? Para conseguirmos uma resposta para essa abordagem usamos as formas genéricas,

$$\phi' = F(\phi, \chi) \quad \chi' = G(\phi, \chi), \quad (5.9)$$

então aplicando estas equações em (5.6) e (5.7), estabelecemos uma restrição mais fundamental,

$$g + F_\chi - G_\phi = 0. \quad (5.10)$$

---

<sup>1</sup>Superpotenciais são funções contínuas que estão associadas a descrição de setores bosônicos reais em teorias supersimétricas [32, 33]

Deste modo, podemos observar que ao substituirmos as formas propostas por Barreto et al. em (5.10), derivamos o vínculo  $g = s_2 - s_1$ . Consequentemente, a maior restrição para o formalismo de primeira ordem relacionado com o modelo de VIL introduzido em [23], é aquela descrita por (5.10). Por analogia aplicando o *Ansatz* (5.9) em (5.2) e (5.5), resulta na restrição

$$G_\phi + F_\chi(3gG_\phi - 1) + g [G_\chi^2 - G_\chi F_\phi + F_\phi^2 + G(G_{\chi\chi} + F_{\phi\chi}) + F(G_{\phi\chi} + F_{\phi\phi})] = 0. \quad (5.11)$$

Podemos perceber que a diferença entre as equações (5.10) e (5.11) é uma consequência direta dos termos  $g\phi'''$  e  $g\chi'''$  presentes na equação de movimento do modelo. Uma maneira de encontrar soluções que satisfaçam o vínculo (5.11), consiste em definir que as funções  $F$  e  $G$  possuem as seguintes dependências

$$F = W_\phi(\phi, \chi) + Z(\phi) [\phi - f(\chi)]; \quad G = W_\chi(\phi, \chi) + Z(\chi) [\phi - f(\chi)];$$

$$Z(\phi) = Z(\chi) \quad (5.12)$$

onde o superpotencial  $W$  estar relacionado com uma teoria analítica padrão de dois campos, e  $Z$  é uma função arbitrária, cuja forma explícita é determinada a partir de (5.11) substituindo (5.12) e suas derivadas. Além disso é usado o mapeamento ou método de deformação [34],  $\phi = f(\chi)$ , para escrever  $Z(\phi)$  como  $Z(\chi)$ . Observamos que tal mapeamento é análogo a uma órbita específica entre os dois campos escalares. Então para uma dada conexão entre  $\phi$  e  $\chi$  os termos multiplicando  $Z$  em (5.12) irão se cancelar. Ao determinarmos a forma da função  $Z$ , podemos verificar que as soluções das equações de primeira ordem de fato irão satisfazer as equações de movimento (5.2).

### 5.1.1 Exemplo $\phi^4 + \chi^4$

Vamos ilustrar a metodologia da última seção com um exemplo envolvendo um modelo  $\phi^4$  acoplado a um modelo  $\chi^4$ , que é derivado a partir do superpotencial,

$$W(\phi, \chi) = k \left( \phi - \frac{\phi^3}{3} \right) + k \left( \chi - \frac{\chi^3}{3} \right), \quad (5.13)$$

e os defeitos analíticos associados com tal modelo são,

$$\phi(x) = \tanh(kx); \quad \chi(x) = \tanh(kx), \quad (5.14)$$

que revelam soluções topológicas tipo-*kink*. Conseqüentemente, a função de deformação que conecta esses campos é simplesmente ,

$$\phi = f(\chi) = \chi. \quad (5.15)$$

A equação (5.13) revela que as formas de  $F$  e  $G$  serão respectivamente

$$F = k(1 - \phi^2) + Z(\phi)(\phi - \chi); \quad G = k(1 - \chi^2) + Z(\chi)(\phi - \chi), \quad (5.16)$$

para determinarmos a forma da função arbitrária  $Z$ , substituímos as funções anteriores e suas derivadas em (5.11), resultando no vínculo

$$Z(\chi) = 2gk^2(1 - 2\chi^2), \quad (5.17)$$

cujas obtenção foi possível graças ao fato de  $Z(\phi) = Z(\chi)$ ,  $Z_\phi(\phi) = Z_\chi(\chi)$  e  $\phi = \chi$ . Então a abordagem de primeira ordem para esse modelo de VIL é baseada nas seguintes equações de primeira ordem,

$$\phi' = k(1 - \phi^2) + 2gk^2(1 - 2\phi^2)(\phi - \chi); \quad \chi' = k(1 - \chi^2) + 2gk^2(1 - 2\chi^2)(\phi - \chi), \quad (5.18)$$

cujas soluções analíticas correspondentes são aquelas apresentadas em (5.14). Usamos estas equações diferenciais de primeira ordem e suas derivadas segundas em (5.5) para construir o potencial efetivo de dois campos escalares  $V(\phi, \chi)$ , cuja forma explicita é,

$$\begin{aligned} V(\phi, \chi) = & \frac{k^2}{2} \left\{ [64g^4k^4(1 - 2\chi^2)(2\phi^2 - 1)(\phi - \chi)^4 \right. \\ & - 16g^3k^3(\phi - \chi)^3(5 + 3(4\chi^2 - 3)\phi^2 - 2\chi\phi - 9\chi^2) \\ & + 4g^2k^2(\phi - \chi)^2(4\chi^4 + 7\chi^2 + 4\phi^4 + (7 - 12\chi^2)\phi^2 + 2\chi\phi - 6) \\ & \left. + 4gk(\phi - \chi)(2\chi^4 - 2\chi^2 + 2\phi^4 - (\chi^2 + 2)\phi^2 + 1) + \chi^4 - 2\chi^2 + \phi^4 - 2\phi^2 + 2 \right\}. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Com o potencial efetivo tomamos as suas derivadas em relação a  $\phi$  e  $\chi$ , e usamos para provar que as soluções analíticas de (5.14) satisfazem as equações de movimento (5.2).

Para determinar a energia total dos defeitos é feita uma integração da densidade Hamiltoniana sobre todo espaço, que para tal modelo é derivado a partir da componente

$T^{00}$  do tensor energia-momentum<sup>2</sup>, cuja forma para esta dinâmica específica é,

$$H = T^{00} = \sum_{i=1}^2 \left\{ \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi_i)} - \partial_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \partial_\alpha \phi_i)} \right] \partial^0 \phi_i + \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \partial_\alpha \phi_i)} \right] \partial_\alpha \partial^0 \phi_i \right\} - \mathcal{L}; \quad (5.20)$$

com  $\phi_1 = \phi$  e  $\phi_2 = \chi$ . Logo para defeitos estáticos, a equação prévia se modifica para,

$$H = T^{00} = \frac{\phi'^2}{2} + \frac{\chi'^2}{2} - g\chi''\phi' + V(\phi, \chi), \quad (5.21)$$

substituindo as derivadas das funções (5.18), e o potencial efetivo (5.19), na equação acima, obtemos

$$H = 2k^2 \text{sech}^4(kx) [gk \tanh(kx) + 1], \quad (5.22)$$

que integrando sobre todo o espaço, resulta na energia total,

$$E = 2k^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \text{sech}^4(kx) [gk \tanh(kx) + 1] dx = \frac{8}{3}k \quad (5.23)$$

assim, é obtido uma energia total positiva e finita.

Analisando os pontos extremos do potencial (5.19), encontramos um máximo local em  $V(0, 0) = k^2$  e dois mínimos em  $V(\pm 1, \pm 1) = 0$ , que fazendo o teste da derivada segunda<sup>3</sup> podemos garantir que os mínimos  $\phi_v = \chi_v = \pm 1$  serão verdadeiros, se

$$D = V_{\phi\phi}V_{\chi\chi} - V_{\phi\chi}^2 = 16(k^4 + 8g^2k^6) > 0, \quad (5.24)$$

e

$$V_{\phi\phi} = 4k^2(1 + 2gk(-1 + 3gk)) > 0, \quad (5.25)$$

essa última equação revela que,

$$\begin{aligned} 4k^2(1 + 2gk(-1 + 3gk)) &> 0 \\ 1 + 2gk(-1 + 3gk) &> 0 \\ 2gk(-1 + 3gk) &> -1 \\ 2gk(1 - 3gk) &< 1, \end{aligned} \quad (5.26)$$

o que corresponde a uma restrição entre  $k$  e o parâmetro de violação de Lorentz  $g$ .

Além disso, se for tomado  $g = 0$ , o potencial  $V$  em (5.19), reduz para o potencial

<sup>2</sup>O tensor energia-momentum no formalismo de altas ordens derivativas está expresso no Apêndice C.

<sup>3</sup>O teste da derivada segunda para funções de duas variáveis é feita pelo uso da matriz hessiana sendo maior que zero,  $D = V_{\phi\phi}V_{\chi\chi} - V_{\phi\chi}^2 > 0$  e a derivada segunda do potencial em relação a  $\phi$  sendo também maior que zero,  $V_{\phi\phi} > 0$  podemos garantir que os mínimos são mínimos locais.

padrão dado por,

$$V_p(\phi, \chi) = \frac{k^2}{2}(\chi^4 - 2\chi^2 + \phi^4 - 2\phi^2 + 2), \quad (5.27)$$

que tem quatro pontos de sela em  $(\pm 1, 0)$  e  $(0, \pm 1)$ , implicando em  $V_p(\pm 1, 0) = V_p(0, \pm 1) = k^2/2$ . Agora aplicando  $\phi = \pm 1$  e  $\chi = 0$  em (5.19), temos

$$V(\pm 1, 0) = \frac{k^2}{2} \pm 2gk^3 + 10g^2k^4 - 32g^3k^5 + 32g^4k^6 \equiv V_p(\pm 1, 0) + ck^2, \quad (5.28)$$

com

$$c = \pm 2gk + 10g^2k^2 - 32g^3k^3 + 32g^4k^4, \quad (5.29)$$

onde  $c$  é uma pequena correção para o potencial original causado pelo parâmetro de VIL. Agora supondo que  $g \equiv (\alpha k)^{-1}$ , onde  $\alpha$  é uma constante adimensional real, a equação anterior é reescrita como,

$$\frac{(\alpha \pm 2)^2(\alpha^2 + 16)}{2\alpha^4} = \left(\frac{1}{2} + c\right). \quad (5.30)$$

Para termos certeza que  $g$  propicia pequenas perturbações sobre o potencial padrão, é considerado uma correção  $c = 10^{-1}$  na equação acima, implicando em  $\alpha \approx \pm 24, 61$ , analogamente para uma correção  $c = 10^{-2}$ , temos  $\alpha \approx \pm 204, 96$ . Em tais casos, se  $k = \pm 1$ , determinamos que  $g \approx 0, 04$  e  $g \approx 0, 005$  para  $c = 10^{-1}$  e  $c = 10^{-2}$  respectivamente. Os efeitos dessas perturbações causadas pelo parâmetro de VIL podem ser visualizados nas Figuras 5.1 e 5.2 nas quais, é possível perceber que pequenos valores de  $c$  resultam em pequenas correções sobre o potencial padrão.

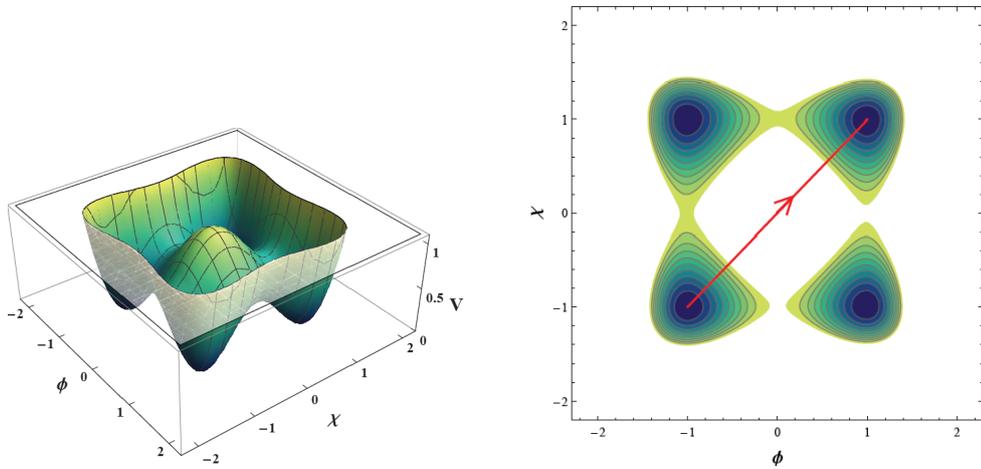


Figura 5.1: O potencial à esquerda para  $g = (\alpha k)^{-1}$ ,  $\alpha = 204, 96$ , e  $k = 1$ . A direita o gráfico do contorno de  $V$ , onde a linha vermelha representa a órbita analítica do presente modelo conectando o mínimo  $(-1, -1)$  com  $(1, 1)$ .

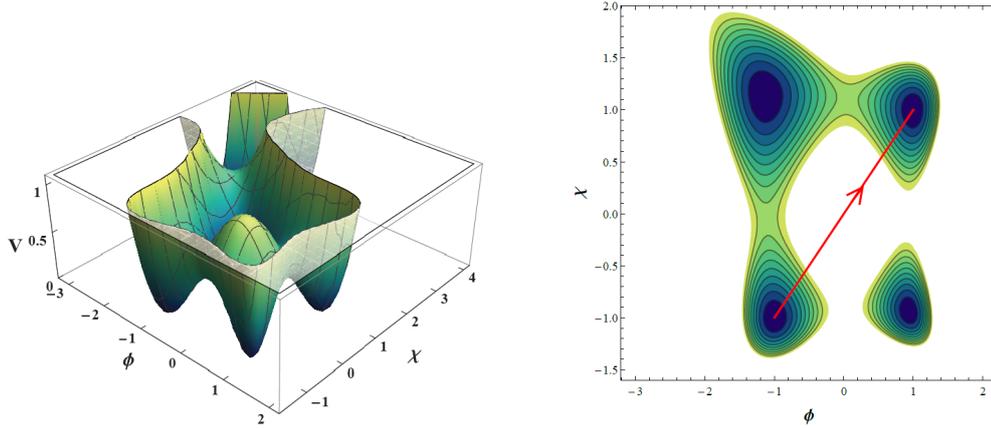


Figura 5.2: O potencial a esquerda para  $g = (\alpha k)^{-1}$ ,  $\alpha = 24,61$ , e  $k = 1$ . A direita o gráfico do contorno de  $V$ , onde a linha vermelha representa a órbita analítica do presente modelo conectando o mínimo  $(-1,-1)$  com  $(1,1)$ .

E ainda o fato que  $k = (\alpha g)^{-1}$  significa que os defeitos são sensíveis ao parâmetro de VIL, como pode ser visualizado na Figura (5.3), onde a intensidade de transição entre dois vácuos depende de  $g$ .

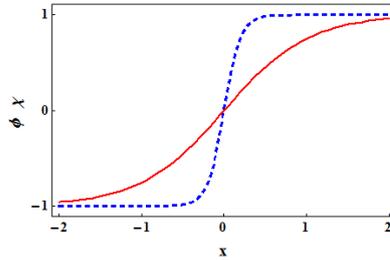


Figura 5.3: Os campos  $\phi$  e  $\chi$  do modelo  $\phi^4 - \chi^4$ , onde os *kinks* foram gerados com  $k = (\alpha g)^{-1}$ ,  $\alpha = 204,96$ ,  $g = 0,005$  (curva sólida vermelha), e  $g = 0,001$  (curva azul tracejada). Concluímos que pequenos valores de  $g$  resultam em transições mais intensas entre os vácuos.

## 5.2 Defeitos tipo ondas viajantes

Nesta seção aplicamos um *Ansatz* dependente do tempo nas equações de movimento, que no estudo de defeitos topológicos é conhecido como ondas viajantes, sendo este, um *kink* dinâmico que se propaga como um pacote de onda, com velocidade constante e sem mudar sua forma. Vamos analisar a possibilidade de soluções tipo ondas viajantes para os cenários tipo-tempo, tipo-espaço e tipo-luz, em tal abordagem foi usado o *Ansatz*,

$$\phi = \phi(kx + \omega t); \quad \chi = \chi(kx + \omega t), \quad (5.31)$$

e suas derivadas podem ser escritas como,

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= \frac{\omega}{k} \phi'; & \ddot{\phi} &= \frac{\omega^2}{k^2} \phi''; \\ \dot{\chi} &= \frac{\omega}{k} \chi'; & \ddot{\chi} &= \frac{\omega^2}{k^2} \chi''. \end{aligned} \quad (5.32)$$

Assim as Equações (4.2), (4.3) e (4.4), serão simplificadas e reescritas apenas em termos de derivadas em relação à variável espacial<sup>4</sup>  $x$ , como vemos abaixo

$$\begin{aligned} -a\phi'' + b_i\chi''' + V_\phi &= 0; \\ -a\chi'' - b_i\phi''' + V_\chi &= 0, \end{aligned} \quad (5.33)$$

com  $i = 1$  para tipo-tempo,  $i = 2$  para tipo-espaço e  $i = 3$  para tipo-luz, além disso, os valores explícitos das constantes  $a$  e  $b_i$  são,

$$a = 1 - \frac{\omega^2}{k^2}; \quad b_1 = g \frac{\omega^2}{k^2}; \quad b_2 = \frac{\omega}{k}; \quad b_3 = g \left(1 + \frac{\omega}{k}\right)^3. \quad (5.34)$$

As equações de movimento (5.33) podem ser integradas uma vez, de forma direta. Tal procedimento consiste em multiplicar a equação à esquerda de (5.33) por  $\phi$  e a equação à direita por  $\chi$ , deste modo, a adição de ambas resulta em

$$\frac{dV(\phi, \chi)}{dx} = a \frac{d}{dx} \left( \frac{\phi'^2}{2} + \frac{\chi'^2}{2} \right) - b_i \frac{d}{dx} (\chi''\phi' - \phi''\chi'), \quad (5.35)$$

cuja integração resulta no potencial efetivo,

$$V(\phi, \chi) = a \left( \frac{\phi'^2}{2} + \frac{\chi'^2}{2} \right) - b_i (\chi''\phi' - \phi''\chi'). \quad (5.36)$$

---

<sup>4</sup>Adotamos este procedimento a fim de simplificar o processo de resolução. A informação sobre a dependência temporal das equações estão inseridas nas constantes  $a$  e  $b_i$  com  $i = 1, 2, 3$ .

Portanto considerando as equações diferenciais de primeira ordem estabelecidas em (5.9) e repetindo a metodologia apresentada na última seção, encontramos a equação de restrição,

$$aG_\phi + F_\chi(3bG_\phi - a) + b [G_\chi^2 - G_\chi F_\phi + F_\phi^2 + G(G_{\chi\chi} + F_{\phi\chi}) + F(G_{\phi\chi} + F_{\phi\phi})] = 0, \quad (5.37)$$

mais uma vez, as funções  $F$  e  $G$  obedecem as mesmas prescrições adotadas na equação(5.12), onde elas são escritas em termos da derivada do superpotencial em relação a  $\phi$  e  $\chi$  respectivamente e acrescida de uma função arbitrária  $Z(\phi$  ou  $\chi)$  que tem sua forma explícita determinada a partir da equação de restrição (5.37). Aqui mais uma vez aplicamos a metodologia de resolução, agora para modelos dependentes do tempo, como se segue.

### 5.2.1 Exemplo: modelo BNRT

Para exemplificar a aplicabilidade desta metodologia em defeitos tipo onda viajante, vamos considerar o chamado modelo BNRT, introduzido originalmente por Bazeia e colaboradores [35], cujo superpotencial é

$$W(\phi, \chi) = k \left( \phi - \frac{\phi^3}{3} \right) - k\phi\chi^2. \quad (5.38)$$

Tal modelo possui como um de seus pares de soluções analíticas as relações<sup>5</sup>,

$$\phi(x, t) = -\frac{1}{4e^{2kx+\omega t} + 1}; \quad \chi(x, t) = \frac{4e^{2kx+\omega t}}{4e^{2kx+\omega t} + 1}, \quad (5.39)$$

essas soluções revelam que a função de deformação responsável por conectar estes campos é  $\phi = f(\chi) = \chi - 1$ , assim, o superpotencial juntamente com a função deformação permite escrever  $F$  e  $G$ , como

$$F = k(1 - \phi^2) - k\chi^2 + Z(\phi)(\phi - \chi + 1); \quad G = -2K\phi\chi + Z(\chi)(\phi - \chi + 1). \quad (5.40)$$

Então por substituição de  $F$  e  $G$ , e suas derivadas em (5.37), têm-se,

$$Z(\chi) = -\frac{2}{a}bk^2(1 - 4\chi + 6\chi^2), \quad (5.41)$$

---

<sup>5</sup>A versão estática dessas funções foram introduzidas em [36]

onde, para o processo de simplificação desta última equação, consideramos  $Z(\phi) = Z(\chi)$ ,  $Z_\phi(\phi) = Z_\chi(\chi)$ , além do mais, a função de deformação  $\phi = \chi - 1$  implica que,

$$Z(\phi) = -\frac{2}{a}bk^2(3 + 8\phi + 6\phi^2). \quad (5.42)$$

Desse modo, as equações diferenciais de primeira ordem para este modelo de onda viajante são,

$$\begin{aligned} \phi' &= k(1 - \phi^2) - k\chi^2 - \frac{2}{a}bk^2(3 + 8\phi + 6\phi^2)(\phi - \chi + 1); \\ \chi' &= -2k\phi\chi - \frac{2}{2}bk^2(1 - 4\chi + 6\chi^2)(\phi - \chi + 1), \end{aligned} \quad (5.43)$$

que são satisfeitas por (5.39). Tomando uma derivada a mais em relação a  $x$  das equações diferenciais acima e substituindo-as em (5.36), encontramos o potencial efetivo

$$\begin{aligned} V(\phi, \chi) &= \frac{k^2}{2a^3} \left\{ a^2 [2bk(3 + 8\phi + 6\phi^2) + a(\phi^2 + \chi^2 - 1)]^2 + 4a^2 [a\phi\chi + bk(1 + \phi - \chi) \right. \\ &\quad (1 - 4\chi + 6\chi^2)]^2 - 4bk [48b^3k^3(3 + 8\phi + 6\phi^2)(1 + \phi - \chi)^4(1 - 4\chi + 6\chi^2) \\ &\quad + a^2bk(1 + \phi - \chi)^2 (-(\phi - 1)^2 + 2(\phi - 1)(6\phi^2 - 7)\chi + (13 + 4\phi - 30\phi^2)\chi^2 \\ &\quad - 8(1 + 3\phi)\chi^3 - 6\chi^4) - a^3\chi ((\phi^2 - 1)^2 - 2(1 + \phi^2)\chi^2 + \chi^4) + 4ab^2k^2(1 + \phi - \chi)^3 \\ &\quad \left. (-5 + 2\phi + 3\phi^2 + 8(1 + \phi)(2 - 3\phi + 9\phi^2)\chi + (-53 + 6\phi(2 + 9\phi))\chi^2 + 18\chi^4) \right\}. \end{aligned} \quad (5.44)$$

Com esta última equação pode-se calcular  $V_\phi$  e  $V_\chi$  para escrever as equações de movimento (5.33) explicitamente, e também verificar que elas são satisfeitas por (5.39).

Para determinarmos a energia do sistema, mais uma vez recorreremos a componente  $T^{00}$  do tensor energia-momentum e pelo fato dos defeitos não se alterarem no decorrer do deslocamento, temos que  $H_i = -\mathcal{L}_i$ , onde a densidade lagrangeana para as ondas viajantes abordadas é,

$$\mathcal{L}_i = -\frac{a}{2}(\phi'^2 + \chi'^2) + b_i\chi''\phi' - V(\phi, \chi). \quad (5.45)$$

Assim substituindo as equações diferenciais (5.43) e considerando  $V$  visto em (5.44) encontramos a respectiva densidade de hamiltoniana

$$H_i = \frac{128e^{4\xi}k^2(a - b_ik + 4e^{2\xi}(a + b_ik))}{(1 + 4e^{2\xi})^5}; \quad \xi = kx + \omega t. \quad (5.46)$$

A partir de (5.46), constatamos que  $d\xi = kdx$ , e que a energia total dos defeitos tipo

ondas viajantes é obtida a partir de

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \frac{H_i}{k} = \frac{2ak}{3}. \quad (5.47)$$

Aqui mais uma vez, é traçado uma dependência entre o parâmetro de violação de Lorentz  $g$  e  $k$  (ou  $\omega$ ), analisando os pontos extremos do potencial efetivo e comparando com a forma padrão do potencial BNRT. Primeiramente, calculando  $V_{\phi\phi}$  e o determinante da matriz Hessiana para os pontos  $(-1,0)$  e  $(0,1)$ , podemos ver que eles serão mínimos verdadeiros de  $V$ , se

$$2b_i k \left(1 - \frac{3b_i k}{a}\right) < a, \quad (5.48)$$

levando à primeira restrição envolvendo  $b$  e  $a$ . Para obtermos o potencial padrão do modelo BNRT, fazemos  $g = 0$  em (5.44), daí,

$$V_p(\phi, \chi) = a \frac{k^2}{2} ((\chi^2 - 1)^2 + \phi^4 + (6\chi^2 - 2)\phi^2), \quad (5.49)$$

que apresenta quatro mínimos em  $(\pm 1, 0)$  e  $(0, \pm 1)$ , bem como um máximo local em  $(0, 0)$ ,  $V_p(0, 0) = ak^2/2$ . E fazendo a substituição de  $\phi = \chi = 0$  no potencial (5.44), temos

$$V(0, 0) = \frac{k^2}{2} \left( a - 12b_i k + \frac{44b_i^2 k^2}{a} + \frac{80b_i^3 k^3}{a^2} - \frac{576b_i^4 k^4}{a^3} \right) \equiv \left( \frac{1}{2} - c \right) ak^2, \quad (5.50)$$

com

$$c = \frac{12bk}{a} + \frac{44b^2 k^2}{2a^2} + \frac{80b^3 k^3}{2a^3} - \frac{576b^4 k^4}{2a^4} \quad (5.51)$$

onde  $c$  é uma pequena correção para o potencial original causado pelo parâmetro de VIL. Então, definindo que  $b_i \equiv a(\alpha k)^{-1}$ , a equação anterior é reescrita como ,

$$\frac{\alpha [\alpha((\alpha - 12)\alpha + 44) + 80] - 576}{2\alpha^4} = \frac{1}{2} - c, \quad (5.52)$$

então, para um valor de  $c = 10^{-1}$ , encontramos  $\alpha \approx 55,96$  e para  $c = 10^{-2}$ ,  $\alpha \approx 596,30$ , portanto com esses resultados e aplicando a definição  $b_i \equiv a(\alpha k)^{-1}$  em (5.34) resulta nas seguintes relações de dispersão,

$$\begin{aligned} k_{\pm 1} &= \frac{\omega}{2} \left( \alpha g \omega \pm \sqrt{4 + \alpha^2 g^2 \omega^2} \right); & k_{\pm 2} &= \pm \frac{\omega}{\sqrt{1 - \alpha g \omega}}; \\ k_{31} &= -\omega; & k_{\pm 32} &= \frac{1 - 2\alpha g \omega \pm \sqrt{1 - 8\alpha g \omega}}{2\alpha g}, \end{aligned} \quad (5.53)$$

portanto quando tomamos o limite em que  $g \rightarrow 0$ , temos  $k_{\pm 1} = k_{\pm 2} = \pm \omega$  como é requerido pela teoria invariante de Lorentz padrão. No caso tipo-luz não podemos obter

a relação de dispersão naturalmente, assim expandimos a relação de dispersão  $k_{\pm 32}$  em torno de pequenos valores de  $g$ , ou seja,

$$k_{+32} = \omega + 4\alpha\omega^2g; \quad k_{-32} = \frac{1}{\alpha g} - 3\omega - 4\alpha\omega^2g, \quad (5.54)$$

até termos da ordem de  $g$ . A última expressão mostra que  $k_{-32}$  é fortemente dependente de pequenos valores de  $g$ , se comportando analogamente a relação de dispersão do tipo-luz no caso da solução particular vista em (4.31). Concluimos que, ao contrário de  $k_{31}$  e  $k_{+32}$ ,  $k_{-32}$  não pode reproduzir a relação de dispersão para a densidade lagrangeana de dois campos padrão de uma maneira natural, mesmo que leve a uma densidade de energia integrável. O comportamento não analítico de  $k_{-32}$  no parâmetro perturbativo é consistente com a relação de dispersão obtida por Reyes em [5, 37] para esse modelo eletromagnético de Myers-Pospelov. Como apontado em [5, 37] uma forte dependência quando  $g \rightarrow 0$ , pode ser interpretado como graus de liberdade extra para a teoria tipo-luz, caracterizando assim como uma genuína teoria de altas ordens derivativas.

Vamos analisar agora o efeito do parâmetro perturbativo  $g$ , nesse caso específico a Figura(5.4) exemplifica defeitos tipo-ondas viajantes para o cenário tipo-tempo, pode-se

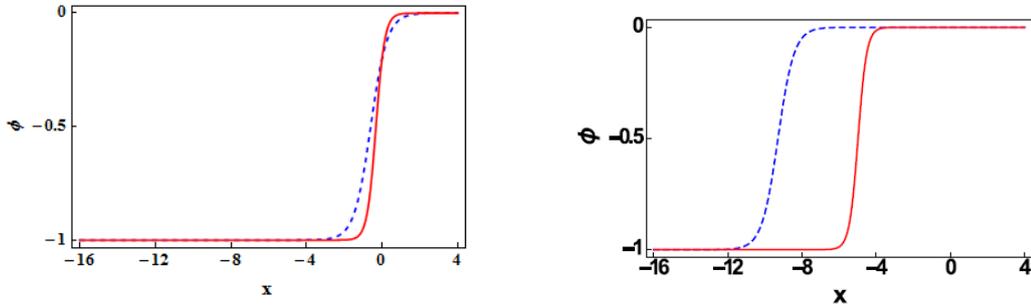


Figura 5.4: O gráfico do campo  $\phi$ , para o tipo-tempo do modelo BNRT. Os kinks foram gerados com  $k_{+1}$ ,  $\alpha = 55,96$ ,  $g = 0,03$  (curva sólida vermelha),  $g = 0,005$  (curva tracejada azul),  $\omega = 1$ , em  $t = 0$  a esquerda e  $t = 10$  a direita. Concluimos que pequenos valores de  $g$  resultam num rápido deslocamento dos defeitos.

perceber que os defeitos se movem rapidamente para pequenos valores de  $g$ . Podemos visualizar tais características nas Figuras(5.5 e 5.6), onde a primeira ilustra o potencial  $V$  com uma correção de  $c = 10^{-2}$  devido ao parâmetro de VIL, bem como o seu contorno, onde os mínimos  $(-1, 0)$  e  $(0, 1)$  são conectados via soluções analíticas (5.39). Já a Figura (5.6) revela o comportamento do potencial  $V$  com uma correção  $c = 10^{-1}$  e seu respectivo contorno, onde a linha vermelha conecta as orbitas analíticas. Analisando os gráficos

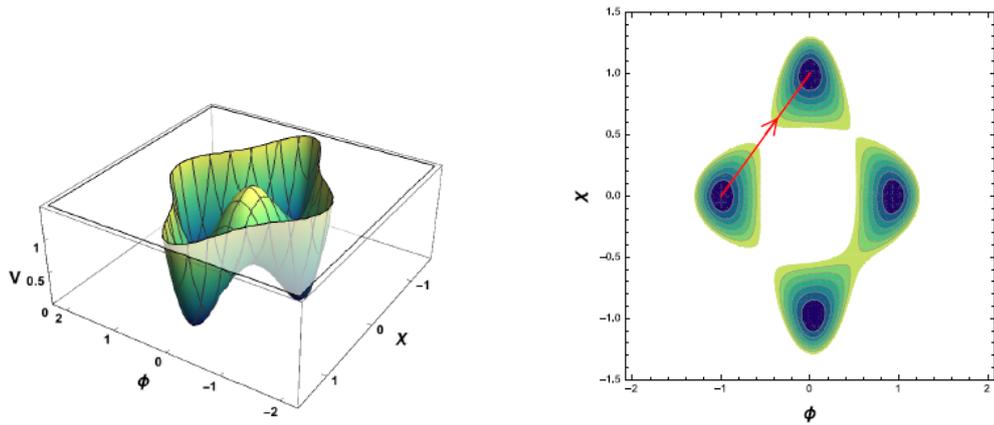


Figura 5.5: O potencial a esquerda para o tipo-tempo, com  $b = a(\alpha k_{+1})^{-1}$ ,  $\alpha = 596,30$ ,  $k_{+1} = 2$ ,  $\omega = 1$ , e  $g = 0,003$ . A direita temos o contorno do potencial  $V$ , onde a linha vermelha representa a órbita analítica do modelo conectando o mínimo  $(-1,0)$  com  $(0,1)$ .

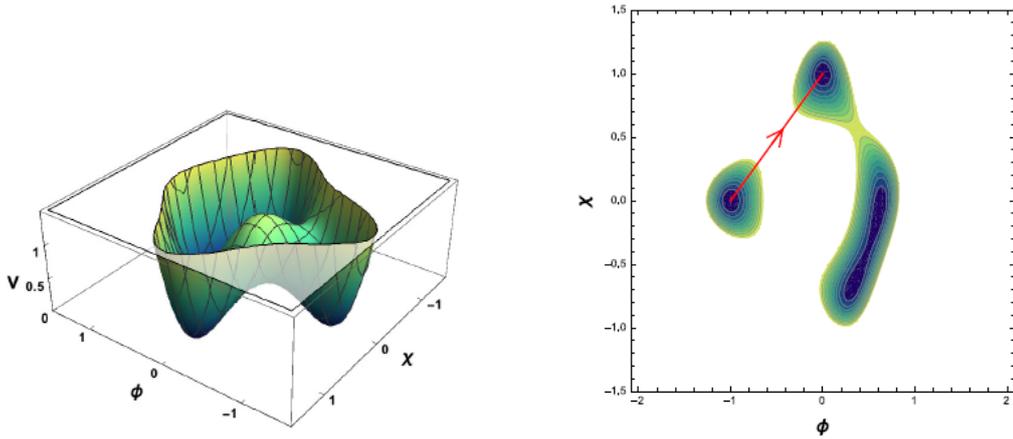


Figura 5.6: O potencial a esquerda para o tipo-tempo, com  $b = a(\alpha k_{+1})^{-1}$ ,  $\alpha = 55,96$ ,  $k_{+1} = 2$ ,  $\omega = 1$ , e  $g = 0,03$ . A direita temos o contorno do potencial  $V$ , onde a linha vermelha representa a órbita analítica do modelo conectando o mínimo  $(-1,0)$  com  $(0,1)$ .

concluimos que pequenos valores de  $c$  resultam em pequenas deformações no potencial de uma teoria invariante de Lorentz.

# Capítulo 6

## Conclusão e Perspectiva

Neste trabalho de dissertação, foram estudadas as propriedades associadas a Lagrangeana de Myers-Pospelov em 2D descrita por dois campos escalares reais:  $\phi$  e  $\chi$ . Primeiro verificamos que este tipo de modelo pode ser obtido por um determinado processo de redução de dimensional com base na projeção da Lagrangeana de 4D para 2D. O ponto chave do procedimento de projeção dimensional é de que ele modifica a ordem do operador derivativo que insere a VIL, antes de dimensão-cinco em 4D para dimensão-três agora em 2D.

Obtemos as equações de movimento para os três regimes distintos de ocorrência da VIL, isto é, quando restringe-se o quadri-vetor constante,  $n_\mu$ , ao caso tipo-tempo, caso tipo-espaço e caso tipo-luz. Nossa primeira análise focou nas equações de movimento associadas a esses diferentes regimes pelas quais mostramos que elas são satisfeitas por um conjunto específico de campos analíticos que por sua vez, são soluções da equação de Burgers em baixas velocidades. Estudamos também o procedimento de obtenção das soluções analíticas para o caso estático (dependência espacial) e também para o caso de ondas viajantes (dependência temporal) relacionados a tal Lagrangeana. No sentido de se ter um melhor entendimento das aplicabilidades dos procedimentos, os exemplificamos através de campos tipo defeitos estáticos e dependentes do tempo.

Como aplicação do procedimento, consideramos um superpotencial estático descrito por  $\phi^4 - \chi^4$ , e também pelo uso do modelo BNRT, que são exemplos clássicos de soluções de modelos de dois campos acoplados. A metodologia resulta na geração de potenciais que possuem diversos termos de acoplamentos envolvendo ambos os campos escalares. Como descritos nas Figs.( 5.1, 5.2, 5.5 e 5.6), o parâmetro que controlam a VIL é responsável pelos efeitos de deformações exibidos pelos potenciais. A dependência entre

$k$  (vetor de onda) e  $g$  no capítulo 5 define em quais direções os modelos analíticos obtidos devem ser consistentes com pequenas deformações sobre os potenciais usuais. Além disso, o parâmetro  $g$  também muda a intensidade da transição entre dois vácuos, como é observado na Fig.(5.3) ou a velocidade das propagações dos solitons, veja também a Fig. (5.4).

A perspectiva natural desse trabalho é a de analisar outras alternativas de inserir os termos que controlam a VIL nas soluções solitônicas via uma abordagem perturbativa. Acreditamos que este tipo metodologia poderá determinar novas regras para descrever soluções analíticas para modelos com termos cinéticos generalizados em que pode ser aplicada em outros cenários que envolvam ou não efeitos da VIL. Uma outro possibilidade de estender o presente trabalho é a de considerar outros cenários da literatura que descrevem modelos em altas ordens derivativas na ausência ou na presença de quebra explícita da invariância de Lorentz. Para o caso da ausência da VIL, podemos examinar o conteúdo físico em 2D da teoria de campos eletromagnética de Podolsky [39, 40], originalmente descrita em 4D. E para o caso da presença da VIL, podemos estudar o conteúdo físico de modelos eletromagnéticos descrito por operadores de dimensão-seis [41].

# Apêndice A

## Obtenção da equação de movimento

Fazendo a minimização da ação obtemos a seguinte equação,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\alpha} = \partial_\sigma \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\sigma A_\alpha)} - \partial_\rho \partial_\sigma \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\rho \partial_\sigma A_\alpha)} \quad (\text{A.1})$$

que aplicando a densidade lagrangeana da pela Eq.(2.1) na presença de uma fonte externa, temos para a derivada em relação a  $A_\mu$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\alpha} = \frac{\partial}{\partial A_\alpha} (-j_\mu A^\mu) = -4\pi j_\mu \frac{\partial A^\mu}{\partial A_\alpha} = -j^\mu \frac{\partial A_\mu}{\partial A_\alpha} = -j^\mu \delta_\mu^\alpha = -j^\alpha$$

agora, analisando os termos de derivada primeira,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\sigma A_\alpha)} = \frac{\partial}{\partial (\partial_\sigma A_\alpha)} \left( -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{g}{2} n^\mu F_{\mu\nu} n^\theta \partial_\theta (n_\beta \varepsilon^{\beta\nu\gamma\lambda} F_{\gamma\lambda}) \right)$$

onde o primeiro termo que é a parte usual da densidade lagrangiana, se torna;

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\sigma A_\alpha)} &= -\frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial (\partial_\sigma A_\alpha)} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad \text{onde } F^{\mu\nu} = g^{\mu\lambda} g^{\nu\theta} F_{\lambda\theta} \\ &= -\frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial (\partial_\sigma A_\alpha)} F_{\mu\nu} g^{\mu\lambda} g^{\nu\theta} F_{\lambda\theta} \\ &= -\frac{1}{4} g^{\mu\lambda} g^{\nu\theta} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial (\partial_\sigma A_\alpha)} F_{\mu\nu} \right) F_{\lambda\theta} + F_{\mu\nu} \left( \frac{\partial}{\partial (\partial_\sigma A_\alpha)} F_{\lambda\theta} \right) \right] \\ &= -\frac{1}{4} g^{\mu\lambda} g^{\nu\theta} [(\delta_\mu^\sigma \delta_\nu^\alpha - \delta_\nu^\sigma \delta_\mu^\alpha) F_{\lambda\theta} + F_{\mu\nu} (\delta_\lambda^\sigma \delta_\theta^\alpha - \delta_\theta^\sigma \delta_\lambda^\alpha)] \\ &= -F^{\sigma\alpha}, \end{aligned}$$

e o segundo termo;

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\sigma A_\alpha)} &= \frac{\partial}{\partial(\partial_\sigma A_\alpha)} \left( \frac{g}{2} n^\mu F_{\mu\nu} n^\theta \partial_\theta (n_\beta \varepsilon^{\beta\nu\gamma\lambda} F_{\gamma\lambda}) \right) \\
&= \frac{g}{2} n^\mu \left( \frac{\partial}{\partial(\partial_\sigma A_\alpha)} F_{\mu\nu} \right) n^\theta \partial_\theta (n_\beta \varepsilon^{\beta\nu\gamma\lambda} F_{\gamma\lambda}) \\
&= \frac{g}{2} n^\mu (\delta_\mu^\sigma \delta_\nu^\alpha - \delta_\nu^\sigma \delta_\mu^\alpha) n^\theta \partial_\theta (n_\beta \varepsilon^{\beta\nu\gamma\lambda} F_{\gamma\lambda}) \\
&= \frac{g}{2} (n^\sigma n^\theta \partial_\theta n_\beta \varepsilon^{\beta\alpha\gamma\lambda} F_{\gamma\lambda} - n^\alpha n^\theta \partial_\theta n_\beta \varepsilon^{\beta\sigma\gamma\lambda} F_{\gamma\lambda}),
\end{aligned}$$

por último iremos analisar o termo de derivada segunda do quadri-vetor  $A_\mu$ ;

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho \partial_\sigma A_\alpha)} &= \frac{g}{2} n^\mu F_{\mu\nu} n^\theta n_\beta \varepsilon^{\beta\nu\gamma\lambda} \frac{\partial(\partial_\theta F_{\gamma\lambda})}{\partial(\partial_\rho \partial_\sigma A_\alpha)} \\
&= \frac{g}{2} n^\mu F_{\mu\nu} n^\theta n_\beta \varepsilon^{\beta\nu\gamma\lambda} \left[ \frac{\partial(\partial_\theta \partial_\gamma A_\lambda)}{\partial(\partial_\rho \partial_\sigma A_\alpha)} - \frac{\partial(\partial_\theta \partial_\lambda A_\gamma)}{\partial(\partial_\rho \partial_\sigma A_\alpha)} \right] \\
&= \frac{g}{2} n^\mu F_{\mu\nu} n^\theta n_\beta \varepsilon^{\beta\nu\gamma\lambda} [(\delta_\theta^\rho \delta_\gamma^\sigma \delta_\lambda^\alpha) - (\delta_\theta^\rho \delta_\lambda^\sigma \delta_\gamma^\alpha)] \\
&= \frac{g}{2} [n^\mu F_{\mu\nu} n^\rho n_\beta \varepsilon^{\beta\nu\sigma\alpha} - n^\mu F_{\mu\nu} n^\rho n_\beta \varepsilon^{\beta\nu\alpha\sigma}] \\
&= \frac{g}{2} [n^\mu F_{\mu\nu} n^\rho n_\beta \varepsilon^{\beta\nu\sigma\alpha} + n^\mu F_{\mu\nu} n^\rho n_\beta \varepsilon^{\beta\nu\sigma\alpha}] \\
&= \frac{g}{2} [2n^\mu n^\rho n_\beta \varepsilon^{\beta\nu\sigma\alpha} F_{\mu\nu}],
\end{aligned}$$

agora podemos substituir as derivadas na equação (A.1),

$$\begin{aligned}
-\partial_\sigma F^{\sigma\alpha} + \frac{g}{2} \partial_\sigma (n^\sigma n^\theta \partial_\theta n_\beta \varepsilon^{\beta\alpha\gamma\lambda} F_{\gamma\lambda} - n^\alpha n^\theta \partial_\theta n_\beta \varepsilon^{\beta\sigma\gamma\lambda} F_{\gamma\lambda}) + \\
-\frac{g}{2} \partial_\rho \partial_\sigma (2n^\mu n^\rho n_\beta \varepsilon^{\beta\nu\sigma\alpha} F_{\mu\nu}) = -4\pi j^\alpha,
\end{aligned} \tag{A.2}$$

onde o último termo do lado esquerdo da igualdade pode ser reescrito manipulando o tensor eletromagnético, abrindo em dois termos, e vendo que uma parte se anula e a outra permanece da forma ;

$$-\frac{g}{2} \partial_\rho \partial_\sigma (2n^\mu n^\rho n_\beta \varepsilon^{\beta\nu\sigma\alpha} F_{\mu\nu}) = \frac{g}{2} (n^\rho \partial_\rho)^2 n_\beta \varepsilon^{\beta\alpha\nu\sigma} F_{\nu\sigma},$$

então a Eq.(A.2) se torna,

$$\begin{aligned}
-\partial_\sigma F^{\sigma\alpha} + \frac{g}{2} [(n^\rho \partial_\rho)^2 n_\beta \varepsilon^{\beta\alpha\gamma\lambda} F_{\gamma\lambda} - n^\alpha n^\rho \partial_\rho n_\beta \varepsilon^{\beta\sigma\gamma\lambda} \partial_\sigma F_{\gamma\lambda}] + \\
+\frac{g}{2} (n^\rho \partial_\rho)^2 n_\beta \varepsilon^{\beta\alpha\nu\sigma} F_{\nu\sigma} = -4\pi j^\alpha
\end{aligned} \tag{A.3}$$

# Apêndice B

## O tensor energia-momentum no formalismo de altas derivadas

Vamos inicialmente analisar a lagrangeana do campo escalar  $\phi$  e suas primeiras  $m$  derivadas em um espaço-tempo  $n$ -dimensional.

$$L = L(\phi, \partial\phi, \dots \partial^n \phi), \quad (\text{B.1})$$

onde a ação é dada por,

$$S = \int d^n x \mathcal{L}, \quad (\text{B.2})$$

pelo princípio de Hamilton para a minimização da ação, onde ela deve ser estacionária [38], escrevemos

$$\delta S = \int d^n x \delta \mathcal{L} = 0, \quad (\text{B.3})$$

aplicando a variação na lagrangeana, temos

$$\delta \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \phi)} \delta \partial_\alpha \phi + \dots \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\alpha_1} \dots \partial_{\alpha_m} \phi)} \delta (\partial_{\alpha_1} \dots \partial_{\alpha_m} \phi), \quad (\text{B.4})$$

fazendo uma integração por partes na variação das derivadas do campo  $\phi$  e substituindo em Eq.B.3,

$$\delta S = \int d^n x \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \phi)} + \dots (\partial_{\alpha_1} \dots \partial_{\alpha_m}) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\alpha_1} \dots \partial_{\alpha_m} \phi)} \right] \delta \phi = 0, \quad (\text{B.5})$$

vemos que o termo entre colchetes deve ser igual a zero, que é a equação de Euler-Lagrange,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \phi)} + \partial_\alpha \partial_\beta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \partial_\beta \phi)} - \dots \pm (\partial_{\alpha_1} \dots \partial_{\alpha_m}) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\alpha_1} \dots \partial_{\alpha_m} \phi)} = 0 \quad (\text{B.6})$$

Similarmente a este procedimento, podemos generalizar o teorema de Noether,

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\alpha \left\{ \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha\phi)} - \partial_\beta \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha\partial_\beta\phi)} + \dots \right) \delta\phi + \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha\partial_\beta\phi)} - \partial_\sigma \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha\partial_\beta\partial_\sigma)} + \dots \right) \delta\partial_\beta\phi + \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha\partial_\beta\partial_\sigma)} - \dots \right) \delta\partial_\beta\partial_\sigma + \dots \right\} \quad (\text{B.7})$$

Em particular, podemos construir o tensor energia-momentum  $T^{\mu\nu}$  considerando a translação infinitesimal :

$$\delta x^\mu = \varepsilon^\mu; \quad \delta\mathcal{L} = \partial_\mu \mathcal{L} \varepsilon^\mu; \quad \delta\phi = \partial_\mu \phi \varepsilon^\mu; \quad \delta\partial_\alpha\phi = \partial_\mu \partial_\alpha\phi \varepsilon^\mu, \quad (\text{B.8})$$

que substituindo na equação acima, temos

$$\begin{aligned} \partial_\mu \mathcal{L} \varepsilon^\mu &= \partial_\alpha \left\{ \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha\phi)} - \partial_\beta \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha\partial_\beta\phi)} + \dots \right) \partial_\mu \phi \varepsilon^\mu + \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha\partial_\beta\phi)} - \partial_\sigma \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha\partial_\beta\partial_\sigma)} + \dots \right) \partial_\mu \partial_\beta \phi \varepsilon^\mu \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha\partial_\beta\partial_\sigma)} - \dots \right) \partial_\mu \partial_\beta \partial_\sigma \phi \varepsilon^\mu + \dots \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

simplificando e deixando compatível com a densidade lagrangiana usada no nosso trabalho, temos

$$\begin{aligned} \partial_\alpha \left\{ \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha\phi)} - \partial_\beta \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha\partial_\beta\phi)} \right) \partial^\mu \phi + \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha\partial_\beta\phi)} \right) \partial_\beta \partial^\mu \phi \right\} - \eta^{\mu\alpha} \partial_\alpha \mathcal{L} &= 0, \\ \partial_\alpha T^{\alpha\mu} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

em que usamos,  $\partial^\mu \mathcal{L} = \eta^{\mu\alpha} \partial_\alpha \mathcal{L}$  e o tensor energia-momentum é dado por,

$$T^{\alpha\mu} = \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha\phi)} - \partial_\beta \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha\partial_\beta\phi)} \right) \partial^\mu \phi + \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha\partial_\beta\phi)} \right) \partial_\beta \partial^\mu \phi - \eta^{\mu\alpha} \mathcal{L}. \quad (\text{B.11})$$

Então para a lagrangeana do nosso modelo em 2D,

$$\mathcal{L}_{MP} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \frac{1}{2} \partial_\mu \chi \partial^\mu \chi + g n_\mu \varepsilon^{\mu\nu} (n \cdot \partial)^2 \chi \partial_\nu \phi - V(\phi, \chi), \quad (\text{B.12})$$

vamos calcular as derivadas parciais separadamente,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha \phi)} &= \frac{\partial}{\partial(\partial_\alpha \phi)} \left[ \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + g n_\mu \varepsilon^{\mu\nu} (n \cdot \partial)^2 \chi \partial_\nu \phi \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial(\partial_\mu \phi)}{\partial(\partial_\alpha \phi)} \partial^\mu \phi + \partial_\mu \phi \frac{\partial(\partial^\mu \phi)}{\partial(\partial_\alpha \phi)} \right] + g n_\mu \varepsilon^{\mu\nu} (n \cdot \partial)^2 \chi \frac{\partial(\partial_\nu \phi)}{\partial(\partial_\alpha \phi)} \\
&= \frac{1}{2} \left[ \delta_\mu^\alpha \partial^\mu \phi + \partial^\mu \phi \frac{\partial(\partial_\mu \phi)}{\partial(\partial_\alpha \phi)} \right] + g n_\mu \varepsilon^{\mu\nu} (n \cdot \partial)^2 \chi \delta_\nu^\alpha \\
&= \frac{1}{2} [\delta_\mu^\alpha \partial^\mu \phi + \partial^\mu \phi \delta_\mu^\alpha] + g n_\mu \varepsilon^{\mu\nu} (n \cdot \partial)^2 \chi \delta_\nu^\alpha \\
&= \frac{1}{2} [\partial^\alpha \phi + \partial^\alpha \phi] + g n_\mu \varepsilon^{\mu\alpha} (n \cdot \partial)^2 \chi \\
&= \partial^\alpha \phi + g n_\mu \varepsilon^{\mu\alpha} (n \cdot \partial)^2 \chi.
\end{aligned} \tag{B.13}$$

Agora, para  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha \partial_\beta \phi)} = 0$ , tendo em mente que a densidade lagrangeana não apresenta derivadas segunda no campo  $\phi$ . E para as derivadas relativas ao campo  $\chi$ ,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha \chi)} = \frac{\partial}{\partial(\partial_\alpha \chi)} \left( \frac{1}{2} \partial_\mu \chi \partial^\mu \chi \right) = \partial^\alpha \chi \tag{B.14}$$

e a derivada segunda em relação a  $\chi$ ,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha \partial_\beta \chi)} &= \frac{\partial}{\partial(\partial_\alpha \partial_\beta \chi)} \left[ g n_\mu \varepsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \phi n^\lambda n^\rho \partial_\lambda \partial_\rho \chi \right] \\
&= g n_\mu \varepsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \phi n^\lambda n^\rho \frac{\partial(\partial_\lambda \partial_\rho \chi)}{\partial(\partial_\alpha \partial_\beta \chi)} \\
&= g n_\mu \varepsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \phi n^\lambda n^\rho \delta_\lambda^\alpha \delta_\rho^\beta \\
&= g n_\mu \varepsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \phi n^\alpha n^\beta
\end{aligned} \tag{B.15}$$

Após realizarmos as derivadas dos campos, vamos substitui-las no  $T^{\alpha\sigma}$ ,

$$\begin{aligned}
T^{\alpha\sigma} &= (\partial^\alpha \phi + g n_\mu \varepsilon^{\mu\alpha} (n \cdot \partial)^2 \chi) \partial^\sigma + (\partial^\alpha \chi - g n_\mu \varepsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \phi n^\alpha n^\beta \partial_\beta) \partial^\sigma \chi + \\
&\quad (g n_\mu \varepsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \phi n^\alpha n^\beta \partial_\beta \partial^\sigma \chi) - \eta^{\alpha\sigma} \mathcal{L},
\end{aligned} \tag{B.16}$$

onde para obtermos a densidade de energia fazemos  $T^{00}$ , da forma

$$\begin{aligned}
T^{00} &= (\dot{\phi})^2 + g n_\mu \varepsilon^{\mu\alpha} (n \cdot \partial)^2 \chi \dot{\phi} + (\dot{\chi})^2 - g n_\mu \varepsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \phi n^0 n^\beta \partial_\beta \dot{\chi} + (g n_\mu \varepsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \phi n^0 n^\beta \partial_\beta \dot{\chi}) \\
&\quad - \eta^{00} \left\{ \frac{\dot{\phi}^2}{2} - \frac{\phi'^2}{2} + \frac{\dot{\chi}^2}{2} - \frac{\chi'^2}{2} + g [\ddot{\chi} \phi' + \chi'' \phi' + 2 \dot{\chi}' \phi' + \ddot{\chi} \phi + \chi'' \dot{\phi} + 2 \dot{\chi}' \dot{\phi}] - V(\phi, \chi) \right\},
\end{aligned} \tag{B.17}$$

como estamos considerando defeitos estáticos, as derivadas temporais dos campos serão nulas, então, ficamos com a seguinte expressão,

$$T^{00} = \frac{\phi'^2}{2} + \frac{\chi'^2}{2} - g\chi''\phi' + V(\phi, \chi) \quad (\text{B.18})$$

que substituindo as derivadas das funções  $\phi$  e  $\chi$  e o potencial efetivo, podemos integrar a expressão sobre todo o espaço e obtermos a energia do sistema.

# Referências Bibliográficas

- [1] MATTINGLY. D, *Modern tests of Lorentz invariance*, **Living Rev.Rel.** v. 8, n.5, 2005.
- [2] LIBERATI. S, *Tests of Lorentz invariance: a 2013 update* , **Class.Quant.Grav**, v.30, p. 133001, 2013.
- [3] MYERS. R. C, POSPELOV. M, *Ultraviolet modifications of dispersion relations in effective field theory.* **Phys. Rev. Lett**, v. 90, n. 21, p. 211601, 2003.
- [4] REYES. C.M ,URRUTIA. L.F,VERGARA.J.D *Quantization of the Myers-Pospelov model: The Photon sector interacting with standard fermions as a perturbation of QED.* **Phys. Rev. D**,v.78, p.125011, 2008.
- [5] REYES.C.M, *Causality and stability for Lorentz-CPT violating electrodynamics with dimension-5 operators.* **Phys. Rev. D**, v.82, p.125036, 2010.
- [6] SCATENA.E, TURCATI.R, *Unitarity and nonrelativistic potential energy in a higher-order Lorentz symmetry breaking electromagnetic model.* **Phys. Rev. D**, v.90, n.12, p.127703, 2014.
- [7] CAMPANELLI, L. *Electromagnetism with dimension-five operators.* **Phys. Rev. D**, v.90, n.10, p.105014, 2014.
- [8] MACCIONE. L, LIBERATI. S, SIGL.G, *Ultra high energy photons as probes of Lorentz symmetry violations in stringy space-time foam models.* **Phys. Rev. Lett**, v.105, p.021101, 2010.
- [9] GUBITOSI. G, GENOVESE. G, CARMELIA. G.A, MELCHIORRI. A, *Planck-scale modifications to Electrodynamics characterized by a space-like symmetry-breaking vector,* **Phys.Rev.D**, v.82, p.024013 2010.

- [10] SAVELIEV. A, MACCIONE. L, SIGL. G , *Lorentz Invariance Violation and Chemical Composition of Ultra High Energy Cosmic Rays* , **JCAP**, V. 046, p. 1103, 2011.
- [11] NOORDMANS. J.P, VRIES. J, TIMMERMANS. R.G.E, *Tests of Lorentz and CPT symmetry with hadrons and nuclei*, **Phys. Rev. C**, v. 94, p. 025502, 2016.
- [12] LAURENT.P, GOTZ. D, BINETRUY. P, COVINO. S, SOTO.A.F, *Constraints on Lorentz Invariance Violation using INTEGRAL/IBIS observations of GRB041219A* , **Phys. Rev. D**, v.83, p. 121301, 2011.
- [13] PASSOS.E, ABREU.E.M.C, ANACLETO.M.A, BRITO.F.A, WATZASEK.C, ZARRO.C.A.D, *Lifshitz scaling to Lorentz-violating high derivative operator and gamma-ray bursts*. **Phys. Rev. D**, v.93, n.8, P.085022, 2016.
- [14] BRITO.F. A, GUIMARAES. M. S, PASSOS.E, SAMPAIO. P ,WOTZASEK. C, *4D-2D projection of Lorentz-violating Myers-Pospelov QED*. **Phys. Rev. D**, v. 86, n. 1,p.105036, 2012.
- [15] BAZEIA. D, FERREIRA.M.M, et al. *Lorentz-violating effects on topological defects generated by two real scalar fields*. **Physica. D**, v. 239, pg.942-947, 2010.
- [16] DUTRA.A.D.S, CORREA.R.A.C, *Traveling solitons in Lorentz and CPT breaking systems* , **Phys. Rev. D**, v.83, p.105007, 2011.
- [17] BELICH.H, FERREIRA. M.M,HELAYEL. J.A.N, *Dimensional reduction of an Abelian-Higgs Lorentz violating model*. **Eur. Phys. Journal** v.38, pg.511-519, 2005.
- [18] BELICH.H, FERREIRA. M.M, HELAYEL. J.A.N, ORLANDO. M.T.D, *Dimensional reduction of a Lorentz and CPT violating Chern-Simons model*. **Phys. Rev. D**, v.67, p.125011 2003.
- [19] RAJARAMAN.R, *Solitons and Instantons*, ed.North.Holland, ISBN:978008057054, V.15, 1982.
- [20] VACHASPATI.T, *Kinks and Domain Walls*, ed.Cambridge Univ. Press, ISBN:9780511245152, 2006.

- [21] VILENKIN.A, SHELLARD.E.P.S, *Cosmic String and other Topological Defects*, ed.Cambridge, UK,ISBN: 0521391539, 1994.
- [22] MARIZ.T, NASCIMENTO.J.R, PETROV.A.Y, *On the perturbative generation of the higher-derivative Lorentz-breaking terms*, **Phys. Rev. D**, v.85, p.125003, 2012.
- [23] BARRETO.M.N, BAZEIA.D, MENEZES.R, *Defect structures in Lorentz and CPT violating scenarios*. **Phys. Rev. D**, v.73, p.065015, 2006.
- [24] GRIGORIO.L.S, GUIMARAES.M.S,WOTZASEK.C, *Induced deformation of the canonical structure and UV/IR duality in (1+1)D*. **Phys. Rev. D**,v.77, p.105015, 2008.
- [25] PASSOS.E,PETROV.A.Y, *Two-dimensional Lorentz-violating Chern-Simons-like action* . **Phys. Lett. B**, v.662, p.441, 2008
- [26] SOUZA DUTRA. de A, CORREA. R.A.C, *Traveling solitons in Lorentz and CPT breaking systems*. **Phys. Rev. D**, v. 83,n. 1, p.105007, 2011.
- [27] BURGERS.J.M, *Adv. Appl. Mech.* 1, 171 (1948).
- [28] BURGERS.J.M, *The Nonlinear Diffusion Equation*, Reidel, Boston, (1974).
- [29] BAZEIA.D, *Chiral Solutions to Generalized Burgers and Burgers-Huxley Equations*, arXiv:solv-int/9802007.
- [30] CASANA. R, CARVALHO.E.S, FERREIRA.M.M.J, *Dimensional reduction of the CPT-even electromagnetic sector of the Standard Model Extension*. **Phys. Rev. D** v.84, P.045008, 2011.
- [31] SOUZA. M.A.M, BAZEIA.D, LOZANO.L, MENEZES.R, *Campos escalares reais e a quebra espontânea de simetria: Uma descrição analítica para defeitos topológicos* **Latin-American Jour. of Phys. Education**, v.6, n.1, ISSN:1870-9095, 2012.
- [32] MORRIS.J.R, BAZEIA.D,*Supersymmetry breaking and Fermi balls*. **Phys. Rev. D**, v.54, 5217-5222, 1996.
- [33] EDELSTEIN, J. BAZEIA,D. *Kinks inside supersymmetric domain ribbons* , **Phys. Rev. D**, v.57, 7561-7569 ,1998.

- [34] BAZEIA.D, LOSANO.L, MALBOUISSON. J.M.C, *Deformed defects*. **Phys. Rev. D**, v.66, p.101701, 2002.
- [35] BAZEIA.D, NASCIMENTO.J.R.S, RIBEIRO.R.F, TOLEDO.D, *Soliton stability in systems of two real scalar fields*. **Jour. of Phys. A: Math.Gen** 30, 8157, 1997.
- [36] DUTRA. A.S, *General solutions for some classes of interacting two field kinks*. **Phys Lett. B**, v.626, p.249, 2005.
- [37] REYES. C.M, *Unitarity in higher-order Lorentz-invariance violating QED*,**Phys. Rev. D**, v.87, p. 125028, 2013.
- [38] BOLLINI.C.G, GIABIAGI.J.J, *Lagrangian Procedures for Higher order field equations*, **Rev. Bras. Fisica**, v.17, n.1, 1987.
- [39] PODOLSKY, B, *A Generalized Electrodynamics Part I-Non-Quantum* **Phys. Rev. D**, v.62, P.68, 1942.
- [40] BONIN.C.A, BUFALO. R, PIMENTEL. B.M, *Podolsky electromagnetism at finite temperature :Implications on the Stefan-Boltzmann*, **Phys. Rev. D**, v.81, p.025003,2010.
- [41] LIBERATI. S, MACCIONE.L, *Lorentz Violation: Motivation and New Constraints*, **Annu. Rev. Nucl**, v.59, p.245, 2009.