



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE  
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA  
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA  
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA  
**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

**Interferência Quântica com estado Híbrido  
Emaranhado no Interferômetro de Mach-Zehnder:  
Análise do número médio de fótons**

**José Roberto da Silva**

CAMPINA GRANDE

- Julho 2016 -

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE  
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA  
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA  
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

**Interferência Quântica com estado Híbrido  
Emaranhado no Interferômetro de Mach-Zehnder:  
Análise do número médio de fótons**

**José Roberto da Silva**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Campina Grande, como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Danievertton Moretti

CAMPINA GRANDE

- Julho 2016 -

INTERFERÊNCIA QUÂNTICA COM ESTADO HÍBRIDO  
EMARANHADO NO INTERFERÔMETRO DE MACH-ZEHNDER:  
ANÁLISE DO NÚMERO MÉDIO DE FÓTONS

JOSÉ ROBERTO DA SILVA

Aprovada em \_\_\_\_\_

BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Dr. Danievertton Moretti  
Orientador

---

Prof. Dr. Augusto Cesar Lima Moreira, UFPE  
Examinador Externo

---

Prof. Dr. Aécio Ferreira de Lima, UFCG  
Examinador Interno

Coordenador: Prof. Dr Marcos Anacleto

*”É somente nas misteriosas equações do amor que alguma lógica real pode ser encontrada.”*

Uma mente brilhante

# Agradecimentos

Os agradecimentos deste trabalho são direcionados:

- A Deus por ter me proporcionado toda sorte de sabedoria
- Ao meu brilhante Professor e amigo Danieverton Moretti por toda paciência de me orientar e tirar todas as minhas dúvidas e apesar de muitas dificuldades que apareceu durante o desenvolvimento da dissertação nunca desistiu e sempre acreditou na minha capacidade.
- A meu antigo orientador Augusto Cesar Moreira e a todos os meus professores e colegas da graduação da UFPE campus Caruaru que me motivaram a continuar meus estudos.
- A todos os meus amigos que fiz durante esses dois anos no apartamento e que considero como irmãos, agradeço pela força que me deram quando mais precisei: Filipe Vieira, Thalles Henrique e Sydney Araujo.
- À UFCG e a todos os meus amigos e colegas do curso e do grupo de pesquisa, em especial a João Gustavo que sempre esteve disposto a me tirar dúvidas e compartilhar conhecimentos da pesquisa.
- A minha família, minha mãe, meus irmãos e todos os meus parentes que sempre esteve comigo.
- À Unidade Acadêmica de Física e também à CAPES pelo suporte financeiro.
- Finalmente, a minha futura esposa Laudineide Quitéria e as minhas princesas, Ludmilla, Laanny e Larah, que apesar de todos os meus problemas sempre estiveram do meu lado sendo elas minha principal fonte de inspiração e motivação.

*À minha família, em especial a  
minha mãe e a minha futura es-  
posa*

# Lista de Figuras

3.1	Representação da evolução temporal do campo elétrico e sua incerteza para um pulso de luz coerente, figura retirada da referência[1] . . . . .	14
3.2	(a) Representação de um estado de vácuo $ 0\rangle$ no plano das quadraturas do campo.(b) Efeito do Operador Deslocamento de Glauber sobre o estado de vácuo, e (c) deslocamento do estado coerente de amplitude $\alpha$ para $\alpha + \beta$ (figura retirada da referência [1]) . . . . .	17
4.1	Descrição Quântica de um Beam Splitter . . . . .	28
4.2	Beam splitter (BS) com um estado coerente $ \alpha\rangle_0$ e um estado de vácuo $ 0\rangle_1$ em seus modos de entradas. . . . .	29
4.3	Beam splitter (BS) com um estado coerente $ \alpha\rangle_0$ e um estado de um único fóton $ 1\rangle_1$ em seus modos de entradas. . . . .	33
4.4	Interferômetro de Mach - Zehnder (MZI) com uma fase fixa no caminho 4 e com estados de entrada genéricos $ in_0\rangle_0$ e $ in_1\rangle_1$ e no BS1. . . . .	54
4.5	Interferômetro de Mach - Zehnder (MZI) com uma fase fixa no modo 4. Os estados de entrada no BS1 são um estado de vácuo $ 0\rangle_1$ e estado coerente $ \alpha\rangle_0$ . . . . .	56
5.1	Média do número de fótons em relação à saída 6 do MZI para o Caso 2 para valores de $ \alpha ^2 = 0$ , $ \alpha ^2 = 1$ e $ \alpha ^2 = 4$ . . . . .	64
5.2	Média do número de fótons em relação à saída 5 do MZI para o Caso 2 para valores de $ \alpha ^2 = 0$ , $ \alpha ^2 = 1$ e $ \alpha ^2 = 4$ . . . . .	64
5.3	Nosso resultado: Média do número de fótons em relação à saída 6 do MZI para o Caso 5 para valores de $ \alpha ^2 = 0$ , $ \alpha ^2 = 1$ e $ \alpha ^2 = 4$ . . . . .	65
5.4	Nosso resultado: Média do número de fótons em relação à saída 5 do MZI para o Caso 5 para valores de $ \alpha ^2 = 0$ , $ \alpha ^2 = 1$ e $ \alpha ^2 = 4$ . . . . .	66

5.5	Gráfico da média de número de fóton na saída 6 do MZI para o estado $ \psi_{01}^{in} = A \alpha\rangle_0 1\rangle_1 + iB -\alpha\rangle_0 0\rangle_1$ para diferentes valores de $\alpha$ mantendo o valor de $ \alpha ^2$ fixo e igual a 0,1. .	67
5.6	Gráfico da média de número de fóton na saída 5 do MZI para o estado $ \psi_{01}^{in} = A \alpha\rangle_0 1\rangle_1 + iB -\alpha\rangle_0 0\rangle_1$ para diferentes valores de $\alpha$ mantendo o valor de $ \alpha ^2$ fixo e igual a 0,1. .	68
5.7	Gráfico da média de número de fóton na saída 6 do MZI para o estado $ \psi_{01}^{in} = A \alpha\rangle_0 1\rangle_1 + iB -\alpha\rangle_0 0\rangle_1$ para diferentes valores de $\alpha$ mantendo o valor de $ \alpha ^2$ fixo e igual a 1/2. .	69
5.8	Gráfico da média de número de fóton na saída 5 do MZI para o estado $ \psi_{01}^{in} = A \alpha\rangle_0 1\rangle_1 + iB -\alpha\rangle_0 0\rangle_1$ para diferentes valores de $\alpha$ mantendo o valor de $ \alpha ^2$ fixo e igual a 1/2. .	70
5.9	Gráfico da média de número de fóton na saída 6 do MZI para o estado $ \psi_{01}^{in} = A \alpha\rangle_0 1\rangle_1 + iB -\alpha\rangle_0 0\rangle_1$ para diferentes valores de $\alpha$ mantendo o valor de $ \alpha ^2$ fixo e igual a 1. . .	70
5.10	Gráfico da média de número de fóton na saída 5 do MZI para o estado $ \psi_{01}^{in} = A \alpha\rangle_0 1\rangle_1 + iB -\alpha\rangle_0 0\rangle_1$ para diferentes valores de $\alpha$ mantendo o valor de $ \alpha ^2$ fixo e igual a 1. . .	71



# Lista de Tabelas

4.1	Resultados obtidos: Caso 1 . . . . .	32
4.2	Resultados obtidos: Caso 2 . . . . .	36
4.3	Resultados obtidos: Caso 3 . . . . .	39
4.4	Resultados obtidos: Caso 4 . . . . .	41
4.5	Resultados obtidos: Caso 5 . . . . .	52

# Sumário

Agradecimentos	v
Lista de Figuras	viii
Lista de Tabelas	ix
Sumário	xi
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Justificativas e Relevâncias . . . . .	2
<b>2 O Oscilador Harmônico</b>	<b>6</b>
2.1 A Equação de Schrodinger . . . . .	6
2.1.1 Operadores de Aniquilação e Destruição . . . . .	7
<b>3 Alguns Estados do Campo Eletromagnético</b>	<b>8</b>
3.1 Quantização do Campo Eletromagnético . . . . .	8
3.2 Estados de Fock . . . . .	12
3.3 Estados Coerentes . . . . .	13
3.3.1 O Operador Deslocamento de Glauber . . . . .	16
3.4 Conceitos Básicos de Estados Emaranhados . . . . .	19
3.4.1 Decomposição de Schmidt . . . . .	19
3.4.2 Estados Emaranhados . . . . .	20
3.4.3 Critério de Simon . . . . .	23
3.4.4 Matriz Densidade Parcial Reduzida . . . . .	25
<b>4 Beam Splitter e Interferômetro de Mach - Zehnder</b>	<b>27</b>
4.1 4.1. Interferência no Beam Splitter . . . . .	27

4.2	Analizando Alguns Casos de Interferência em um Beam Splitter . . . . .	28
4.2.1	Cálculo da Densidade Parcial para o caso 5 no BS . . . . .	43
4.2.2	Cálculo da Média do Número de Fótons no BS . . . . .	47
4.2.3	Interferência no MZI . . . . .	53
4.2.4	Analizando Alguns casos de Interferência no MZI . . . . .	55
4.2.5	Cálculo da Densidade Parcial para o Caso 5 no MZI . . . . .	60
4.2.6	Cálculo da Média do Número de Fótons para o Caso 5 no MZI . . . . .	61
<b>5</b>	<b>Análise Gráfica dos Resultados</b>	<b>63</b>
5.1	Comparação entre os casos 2 e 5 para o MZI: Análise do número médio de fótons . . . . .	63
5.1.1	Discussão da Média do Número de Fótons: Caso 5 . . . . .	66
<b>6</b>	<b>Conclusão e perspectiva</b>	<b>72</b>
<b>7</b>	<b>Apêndice A</b>	<b>74</b>
7.1	Termalização do estado $ \psi_{01}^{in} =  \alpha\rangle_0 0\rangle_1$ . . . . .	74
7.1.1	Duplicação . . . . .	74
7.1.2	Termalização . . . . .	74
7.1.3	Estados de Saída no MZI . . . . .	74
7.1.4	Média do número de fótons . . . . .	76
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>77</b>

# Resumo

O interferômetro de Mach-Zehnder (MZI) é um aparato óptico amplamente utilizado, por exemplo, em aplicações na engenharia e também para se testar fundamentos da Teoria Quântica. Neste trabalho, investigaremos diversos estados quânticos do campo eletromagnético como entrada no MZI, todos sob a perspectiva teórica (analítica). Um estado específico de entrada do tipo emaranhado e híbrido (que se torna separável no limite  $\alpha \rightarrow 0$ ) foi nosso foco principal e, para ele, obtivemos a dependência da média do número de fótons com o deslocamento de fase, entre outros parâmetros. Explicitamente, observamos uma dependência interessante em relação ao  $|\alpha|^2$  bem como com a parte imaginária de  $\alpha$ , discutimos tais resultados e comparamos com a literatura. Além disto, este trabalho também contempla, utilizando Dinâmica de Campos Térmicos (TFD), a termalização do estado  $|\alpha\rangle|0\rangle$ , visando sua utilização no MZI em trabalhos futuros.

Palavras-chave: Deslocamento de fase, Estado coerente, Estado Emaranhado, Estado Híbrido, Estados Termalizados, Interferômetro de Mach-Zehnder

# Abstract

The Mach–Zehnder interferometer (MZI) is an optical apparatus used, e.g., in engineering and also to test the fundamentals of quantum theory. In this work, we investigate different quantum states of the electromagnetic field as input to the MZI, all under the theoretical perspective (analytical). As input, we use a hybrid entangled state (our main focus) which becomes separable in the limit  $\alpha \rightarrow 0$ . We obtain the dependence of the average number of photons with phase shift, among other parameters. Explicitly, we observe an interesting dependence on  $|\alpha|^2$  as well as the imaginary part of  $\alpha$ . We discuss these results and compare with the literature. In addition, this work also includes using Thermo Field Dynamics (TFD), the thermalization of the state  $|\alpha\rangle|0\rangle$ , aiming the usage in the MZI in future works.

Keywords: Phase shift, coherent state, entanglement state, hybrid State, thermal states, Mach-Zehnder interferometer, Fock states

# Capítulo 1

## Introdução

Uma das teorias mais bem sucedidas da mecânica quântica é a óptica quântica, sendo a radiação eletromagnética uma das áreas mais importantes no desenvolvimento da compreensão e da fundamentação das teorias quânticas. Diversas áreas como computação quântica, informação quântica e criptografia vêm sendo construídas tendo como base a óptica quântica [2].

Os resultados mais importantes da óptica e informação quânticas foram obtidos através de experimentos utilizando dispositivos ópticos chamados de interferômetros [3]. A Interferometria é o nome dado às várias técnicas utilizadas para obter informações de ondas, normalmente eletromagnética, sobrepostas. A Interferometria tornou possível uma variedade de medições de precisão usando o fenômeno de interferência, produzidos por ondas de luz. Entre as várias aplicações da interferometria estão medições de comprimento e pequenas mudanças de comprimentos; testes ópticos; estudo da estrutura superficial; medidas de pressão e distribuição de temperatura em fluxo de gás e plasmas; medidas de velocidade de partícula, amplitudes de vibrações entre outras [4]. No estudo, seja teórico ou experimental, de interferômetros, exige-se um arranjo no qual dois ou mais feixes, (neste trabalho usaremos a tradução inglesa da palavra "divisor de feixe", ou seja, "Beams Splitter-BS") derivados da mesma fonte, mas viajando ao longo de caminhos diferentes, podem interferir.

## 1.1 Justificativas e Relevâncias

No presente trabalho, os resultados serão obtidos, de forma teórica, fazendo uso inicial de um único BS e, a partir de adaptações, do MZI. O BS é um dispositivo crucial, uma peça principal, para a construção dos diversos tipos de interferômetros [5]. Tal dispositivo é construído por dois modos de entradas e dois modos de saída (veja a figura 4.1), onde o termo modos é um termo utilizado para descrever características específicas do campo eletromagnético. Na descrição experimental os estados são colocados nos modos de entradas, em separado, gerando, em casos específicos, um estado não separável.

As diversas aplicações da óptica quântica que discutimos dependem do estudo e do entendimento desses estados que entram e também como são transformados. Dependendo dos estados que é posto, ao passar pelo BS, esses estados de entradas podem ser transformados em uma variedade de tipos diferentes como estados deslocados, estado de Fock deslocados, estado de Fock semi - deslocados, e até mesmo estados híbridos emaranhados. Embora ainda hoje exista poucos experimentos capazes de gerar estados híbridos emaranhados existe várias propostas de esquemas e modelos, como veremos a seguir, de trabalhos recentes que possui como finalidade a geração e o estudo dos estados híbridos emaranhados. Um artigo importante recentemente publicado que mostra um esquema e um experimento capaz de gerar tais emaranhamentos híbridos foi desenvolvido por *Hyunseok Jeong* e colaboradores [6]. O experimento e o esquema apresentado neste artigo gera um estado híbrido emaranhado através da implementação de uma superposição de duas operações distintas quântica. Os estados gerados mostram claramente o emaranhamento entre os dois tipos diferentes de estados. Este artigo é de crucial importância para esta dissertação pois iremos utilizar um estado híbrido emaranhado praticamente idêntico com o que foi desenvolvido por *Hyunseok Jeong* (veja o estado do caso 5, seção 4.2.1) e colaboradores. Nosso objetivo é estudar como este estado é transformado em um estado de saída correspondente ao passar pelo BS e também pelo MZI.

Ao longo do tempo, desde o experimento de *Grangier* que propunha um teste fundamental da mecânica quântica, nomeadamente uma pesquisa para violação da desigualdade de Bell [7], vários experimentos foram desenvolvidos e testados com o objetivo de estudar as sobreposições entre estados de luz e as transformações sofridas ao passar pelo BS. Na literatura, existe uma quantidade imensa de trabalhos desenvolvidos com o objetivo de estudar o comportamento de estados sobre o BS e o MZI. Como, por exemplo,

no artigo escrito pelos autores *A. Windhager, M. Suda, C. Pacher, M. Peev, A. Poppe* no qual eles estudaram a interferência quântica (inclusive com auxílio da Função de Wigner) entre um único fóton no estado de Fock e um estado coerente. Os resultados desse artigo são obtidos tanto em um único BS quanto no MZI, sendo este um exemplo do estudo do comportamento de um estado híbrido, porém, não emaranhado.

Nos dias de hoje, temos acompanhado a importância de estudar os estados emaranhados (incluindo os híbridos), uma vez que os chamados *Gedankenexperiment* não são mais apenas experimentos mentais lógicos e consistentes, mas, de fato, situações realizáveis que podem ser implementados por meio de experimentos. Os estados emaranhados têm sido particularmente úteis para testes de desigualdade de Bell, teletransporte quântico e utilizados como recursos eficientes na área de computação quântica e além disso podem ter aplicação de importante impacto, em áreas da criptografia quântica [7]. Como exemplo explícito, o experimento realizado por *Hong, Ou e Mandel (HOM)* demonstrou que a interferometria com dois fótons, um em cada modo de entrada de um BS, exhibe um aspecto interessante. Nos modos de saída do BS, não é detectado coincidência, resultado do agrupamento dos fótons. Este fenômeno ficou conhecido como o efeito "bunching" [9] e tem correlação direta com o fato de fótons serem bósons. Além disto, num contexto mais fundamental, violação das Desigualdades de Bell podem ser demonstradas experimentalmente com auxílio de estados emaranhados gerados por cristais específicos (veja, por exemplo, [10] operando no regime não linear). No experimento de *D. Dehlinger* e colaboradores, a violação nas desigualdades de Bell foram claramente demonstradas. É importante mencionar que o contexto do experimento é para um nível de graduação, mostrando que tal tema encontra-se razoavelmente bem dominado. Embora muitos experimentos do contexto do parágrafo anterior possam deixar lacunas na interpretação ([11], [12], [13]), *B. Hensen* e colaboradores realizaram um sofisticado experimento que demonstram a violação das Desigualdades de Bell. No experimento, um estado emaranhado, porém entre spins eletrônicos, foi preparado. É importante mencionar que os spin estavam espacialmente separados por aproximadamente 1,3 km e um relógio atômico foi usado para sincronizar o experimento. No regime óptico e também livre de lacunas, *Lynden* e colaboradores também demonstraram a violação da DB [14] de uma forma mais exótica. *Qi Guo* e colaboradores demonstraram, inclusive, que é possível transmitir informação quântica entre dois lugares distintos do espaço sem trocar qualquer tipo de partícula en-



tre tais lugares. Um trabalho particularmente belo foi realizado por *Gabriela B. Lemos* e colaboradores [16]. Eles demonstraram que é possível fazer uma "imagem quântica" de um objeto sem que fótons oriundos do objeto atinjam o detector (câmera). Emaranhamento híbrido do campo eletromagnético é um tema que vem despertando grande interesse nos dias de hoje. Diversos experimentos demonstraram a geração de tais estados, além de propostas recente para tal, como é reportado por *Hyukjoon* e colaboradores [17]. Lá, eles propõem um aparato experimental capaz de gerar estados emaranhados híbridos entre um fóton (estado de Fock) polarizados e estados coerentes. Embora a probabilidade de geração seja razoavelmente baixa, o respectivo trabalho discute diversas condições experimentais, mostrando obter uma fidelidade satisfatória. Estados híbridos contendo vácuo, um fóton e coerente, também foram gerados. Um dos coautores (e seus colaboradores) do trabalho citado acima demonstrou a geração de um estado híbrido contendo vácuo, um fóton e estado coerente. O estado gerado é interessante devido a vários aspectos, como por exemplo ser muito próximo do "*Schrödinger's cat Gedanken experiment*", para  $\alpha \gg 1$ . Por outro lado, também se torna aproximadamente separável no limite  $\alpha \sim 0$ . Tal estado foi o que utilizamos em nosso trabalho para investigar seu comportamento no MZI. [6], deixando a ideia clara da aplicação do potencial no contexto de processamento de informação e/ou teleportação quântica. Embora esses trabalhos demonstrem a geração de estados emaranhados, muito esforço ainda é feito para melhorar a precisão na medida da fase. Por exemplo, o livro do *Gerry* [7] explora bem, no cap. 11, a ideia de usar estados emaranhados para tal melhoria, deixando bem claro que emaranhamento não é uma discussão apenas curiosa. Embora o presente trabalho não tenha tratado explicitamente de investigar melhorias na medição da fase, é importante mencionar que futuros cálculos estão programados, tanto para o estado estudado nesta dissertação quanto outros que eventualmente sejam potencialmente interessantes.

Vale ressaltar que uma outra pesquisa que merece destaque é a termalização dos estados quânticos. Quando se pretende desenvolver estudos baseados em tecnologia envolvendo computação quântica torna-se necessário a compreensão do resultado e sua relação com a temperatura. Um dos formalismos utilizados para inserção de temperatura em estados é a Dinâmica de Campos Térmicos-DCT, desenvolvida por *Ezawa, Tomozwa e Umezawa* [19]. Neste formalismo toda álgebra é tratada em meio ao espaço de Hilbert duplicado. Os estados termalizados são obtidos a partir de uma transformação canônica chamada

de transformação de Bogoliubov, aplicada a um estado de vácuo duplicado. De maneira geral, é a partir dos estados que se obtém o desenvolvimento da compreensão e fundamentação das teorias da mecânica quântica e, por sua vez, o entendimento da natureza. Sendo assim, este trabalho, por apresentar alguns resultados de estados bem conhecidos e também estados que recentemente têm sido discutidos e encontrados em diversas aplicações, é de fundamental importância para o desenvolvimento e previsão dos resultados experimentais da óptica quântica.

Este trabalho está estruturado da seguinte maneira: No capítulo 2 apresentamos um breve resumo da Teoria Quântica do Oscilador Harmônico Simples (OHS) que é de crucial importância para o entendimento da álgebra usada no campo eletromagnético quantizado. No capítulo 3 desenvolvemos a quantização do campo eletromagnético e apresentaremos dois estados quânticos: estados de Fock e estados coerentes que servirão de base para o desenvolvimento deste trabalho. No capítulo 4 iremos calcular analiticamente e estudar 5 casos simples envolvendo estados de Fock no vácuo e de um único fóton, e estados coerentes na entrada do (BS) e adaptar os resultados para o MZI. No capítulo 5 faremos a análise gráfica dos resultados obtidos e correlacionaremos com os resultados obtidos na referência [8]. Por fim, a conclusão e as perspectivas estão escritas no capítulo 6. No apêndice A faremos uma termalização do estado  $|\alpha\rangle|0\rangle$ , utilizando a Dinâmica de Campos Térmicos-DCT, desenvolvida por *Ezawa, Tomozawa e Umezawa*.

# Capítulo 2

## O Oscilador Harmônico

Neste capítulo será apresentado um breve resumo da Teoria Quântica do Oscilador Harmônico Simples (OHS). Uma vez que podemos considerar um assunto relativamente conhecido, não o detalharemos demasiadamente. No entanto, é de importância crucial no contexto de nosso trabalho, pois na álgebra da quantização do campo eletromagnético está contida a teoria do OHS.

### 2.1 A Equação de Schrodinger

Para começar usaremos a Equação de Schrodinger independente do tempo, na qual inserimos o potencial do oscilador

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{kx^2}{2} \quad (2.1)$$

onde  $k = m\omega^2$ . As variáveis  $m$  e  $\omega$  são, respectivamente, a massa e a frequência angular do oscilador. Desde que o potencial seja constante no tempo, a equação de Schrodinger independente do tempo (estacionária) determina as soluções  $\psi_n$  (autofunções) e os correspondentes autovalores  $E_n$ . Assim, a equação [2.1] toma a forma

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \psi(x) = E\psi(x). \quad (2.2)$$

As autofunções que são as soluções de Schrodinger são,

$$\psi_n(x) = \left(\frac{1}{\pi\lambda^2}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} H_n\left(\frac{x}{\lambda}\right) e^{-x^2/2\lambda} \quad (2.3)$$

onde  $\lambda = \sqrt{\hbar/m\omega}$  e  $H_n(\xi)$ ,  $\xi = \frac{x}{\lambda}$ , são os polinômios de Hermite. Os autovalores do oscilador harmônico que correspondem as autoenergias são,

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega \quad (2.4)$$

onde  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ .

### 2.1.1 Operadores de Aniquilação e Destruição

Os operadores aniquilação e criação são ferramentas muito usadas para representações de autofunções do oscilador harmônico. Tais operadores são definidos como,

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(x + \frac{ip}{m\omega}\right), \quad \hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(x - \frac{ip}{m\omega}\right) \quad (2.5)$$

onde  $\hat{a}$  e  $\hat{a}^\dagger$  são, respectivamente, os operadores de aniquilação e criação. Utilizando esses operadores o hamiltoniano do oscilador harmônico pode ser escrito como

$$\hat{H} = \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right) \quad (2.6)$$

ou,

$$\hat{H} = \hbar\omega \left(\hat{a}\hat{a}^\dagger - \frac{1}{2}\right). \quad (2.7)$$

A partir dos operadores das equações [2.5] é possível provar que,

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1 \quad [\hat{H}, \hat{a}] = -\hbar\omega\hat{a} \quad [\hat{H}, \hat{a}^\dagger] = \hbar\omega\hat{a}^\dagger. \quad (2.8)$$

Considerando o enésimo estado do oscilador harmônico  $\psi_n(x)$  como sendo  $|n\rangle$ , então  $\hat{a}$  e  $\hat{a}^\dagger$  satisfazem a relação

$$\begin{cases} \hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \\ \hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle. \end{cases} \quad (2.9)$$

Portanto, pode-se construir os estados  $|n\rangle$  como

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(\hat{a}^\dagger)^n|0\rangle. \quad (2.10)$$

# Capítulo 3

## Alguns Estados do Campo Eletromagnético

Neste capítulo, iremos desenvolver a quantização do campo eletromagnético e apresentaremos dois estados quânticos que são amplamente utilizados em óptica quântica e que servirão de base para o desenvolvimento deste trabalho: O estado número de Fock e o estado coerente. O estado número significa que existe um número bem definido de fótons. O estado coerente corresponde a uma superposição linear coerente dos estados números e não possui número de fótons bem definido; ele é caracterizado, entre outros detalhes, pela média.

### 3.1 Quantização do Campo Eletromagnético

Para obter a quantização do campo eletromagnético consideramos as equações

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0, \quad (3.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (3.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (3.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = -\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (3.4)$$

que são as equações de Maxwell (no vácuo) para o campo eletromagnético clássico onde

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \quad (3.5)$$

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}, \quad (3.6)$$

e também,  $\mu_0$  e  $\epsilon_0$  são a permeabilidade magnética e permissividade elétrica para o espaço livre, respectivamente, de forma que  $\mu_0 \epsilon_0 = \frac{1}{c^2}$ , sendo  $c$  a velocidade da luz.

O campo eletromagnético pode ser escrito em termos do potencial vetor, que é uma função vetorial que depende do espaço e do tempo e que designaremos por  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  [20].

Nesse caso, temos que

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (3.7)$$

mas,

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{A}) \\ &= \nabla \times \left( -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) \\ &= -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

É conveniente utilizarmos o Calibre de Coulomb que é dado como

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0. \quad (3.9)$$

Agora para obter a equação de onda do potencial vetor devemos substituir [3.8] em [3.4] para obter

$$\nabla \times \mathbf{H} = \nabla \times \mu_0^{-1} \mathbf{B} = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (3.10)$$

Se substituirmos [3.7] e [3.8] em [3.10] obtemos,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu_0} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) &= \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \\ \frac{1}{\mu_0} [\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}] &= \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left( -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) \\ \frac{1}{\mu_0} \nabla^2 \mathbf{A} &= \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left( -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right). \end{aligned} \quad (3.11)$$

A partir da equação [3.11] e de [3.9] podemos concluir que

$$\nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (3.12)$$

que é a equação de onda para o potencial vetor.

O potencial vetor pode ser escrito como a soma de dois termos complexos, ou seja,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}^{(+)}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{A}^{(-)}(\mathbf{r}, t), \quad (3.13)$$

onde  $\mathbf{A}^{(+)}(\mathbf{r}, t)$  na representação da equação de Fourier é o termo que contém amplitudes que variam de forma similar a um exponencial do tipo  $e^{-i\omega t}$ , onde  $\omega$  é a frequência de oscilação, e o termo  $\mathbf{A}^{(-)}(\mathbf{r}, t)$  contém amplitudes que variam de forma similar a um exponencial do tipo  $e^{i\omega t}$ , sendo  $\omega > 0$  e

$$\mathbf{A}^{(+)}(\mathbf{r}, t) = (\mathbf{A}^{(-)}(\mathbf{r}, t))^*. \quad (3.14)$$

Se expandirmos os termos  $\mathbf{A}^{(+)}(\mathbf{r}, t)$  e  $\mathbf{A}^{(-)}(\mathbf{r}, t)$  em uma série de Fourier obtemos os seguintes resultados

$$\mathbf{A}^{(+)}(\mathbf{r}, t) = \sum_k c_k \mathbf{u}_k(\mathbf{r}) e^{-i\omega_k t} \quad (3.15)$$

$$\mathbf{A}^{(-)}(\mathbf{r}, t) = \sum_k c_k^* \mathbf{u}_k(\mathbf{r}) e^{i\omega_k t} \quad (3.16)$$

onde  $c_k$  são os coeficientes de Fourier e são constante para o campo livre e  $\mathbf{u}_k(\mathbf{r})$  é uma função vetorial que corresponde a frequência  $\omega_k$  que satisfaz a seguinte equação

$$\left( \nabla^2 + \frac{\omega_k^2}{c^2} \right) \mathbf{u}_k(\mathbf{r}) = 0. \quad (3.17)$$

A equação [3.17] corresponde a uma equação de onda resultante da superposição de um conjunto infinito de funções de onda que dependem da frequência e cuja velocidade é igual a velocidade da luz. Além disso, essas funções formam um conjunto ortonormal completo, satisfazem e obedecem a seguinte relação,

$$\int_V \mathbf{u}_k^*(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{u}_{k'}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \delta_{k,k'} \quad (3.18)$$

e ainda é válida a condição de transversalidade

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_k(\mathbf{r}) = 0. \quad (3.19)$$

Para simplificar o tratamento, consideramos o campo restrito a um volume cúbico  $L^3$ , para esse caso podemos escrever

$$\mathbf{u}_k(\mathbf{r}) = \frac{1}{L^{3/2}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \hat{e}^\lambda, \quad (3.20)$$

onde  $\mathbf{k} = \left( \frac{2\pi n_1}{L}, \frac{2\pi n_2}{L}, \frac{2\pi n_3}{L} \right)$ ,  $n_1, n_2, n_3 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ;  $\lambda = 1, 2$ , sendo que  $\hat{e}^\lambda$  é o versor que determina a polarização de  $\mathbf{u}_k(\mathbf{r})$ . Agora, se definirmos uma constante adimensional  $a_k$  como

$$a_k = \sqrt{\frac{2\omega_k \epsilon_0}{\hbar}} c_k \quad (3.21)$$

podemos escrever o potencial vetor e o campo elétrico, respectivamente, como

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \sum_k \left( \frac{\hbar}{2\omega_k \epsilon_0} \right)^{1/2} [a_k \mathbf{u}_k(\mathbf{r}) e^{-i\omega_k t} + a_k^\dagger \mathbf{u}_k^*(\mathbf{r}) e^{i\omega_k t}] \quad (3.22)$$

$$\mathbf{E} = i \sum_k \left( \frac{\hbar\omega_k}{2\epsilon_0} \right)^{1/2} [a_k \mathbf{u}_k(\mathbf{r}) e^{-i\omega_k t} + a_k^\dagger \mathbf{u}_k^*(\mathbf{r}) e^{i\omega_k t}] \quad (3.23)$$

Na eletrodinâmica clássica os termos  $a_k$  e  $a_k^\dagger$  são os coeficientes de Fourier e são números complexos. Já na eletrodinâmica quântica estes coeficientes são tratados como operadores e definiremos como  $\hat{a}_k$  e  $\hat{a}_k^\dagger$ . Como os fótons são bósons então estes operadores devem respeitar a álgebra bosônica,

$$[\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}] = [\hat{a}_k^\dagger, \hat{a}_{k'}^\dagger] = 0 \quad (3.24)$$

$$[\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}^\dagger] = \delta_{k,k'}. \quad (3.25)$$



Finalmente, utilizando [3.23] e levando em consideração as relações de transversalidade e de ortonormalidade de  $\mathbf{u}_k(\mathbf{r})$  é possível obter o hamiltoniano como sendo [20],

$$\hat{H} = \sum_k \hbar\omega_k \left( \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \frac{1}{2} \right) \quad (3.26)$$

O hamiltoniano acima trata de um campo eletromagnético cuja energia corresponde a infinitos osciladores harmônicos (em uma dimensão) com diversos modos de vibração dados pelos  $k$ 's.

## 3.2 Estados de Fock

Os autoestados podem ser calculados facilmente a partir da equação [3.26] de forma que, para cada  $k$  o hamiltoniano dado tem como autovalor  $\hbar\omega_k \left( n_k + \frac{1}{2} \right)$ . Os autoestados  $|n_k\rangle$  obtidos a partir desse hamiltoniano são conhecidos como estados números ou estado de Fock. Considerando nosso conhecimento da natureza, esperamos que haja um estado de energia mínima, que chamamos de estado de vácuo, isto é, o estado que corresponde a um número nulo de fótons, ou seja,

$$\hat{a}_k |0\rangle = 0. \quad (3.27)$$

O valor médio do hamiltoniano para o vácuo pode ser obtido como:

$$\begin{aligned} \langle 0 | \hat{H} | 0 \rangle &= \langle 0 | \sum_k \hbar\omega_k \left( \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \frac{1}{2} \right) | 0 \rangle \\ &= \sum_k \hbar\omega_k \langle 0 | \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k | 0 \rangle + \sum_k \frac{1}{2} \hbar\omega_k \langle 0 | 0 \rangle \\ &= \sum_k \frac{1}{2} \hbar\omega_k \end{aligned} \quad (3.28)$$

Como no oscilador harmônico, capítulo 2, os operadores  $\hat{a}_k^\dagger$  e  $\hat{a}_k$  obedecem às relações semelhantes a [2.9]:

$$\hat{a}_k |n_k\rangle = \sqrt{n_k} |n_k - 1\rangle \quad (3.29)$$

$$\hat{a}_k^\dagger |n_k\rangle = \sqrt{n_k + 1} |n_k + 1\rangle. \quad (3.30)$$

Esses são também operadores criação e destruição, porém, no modo específico  $k$ , que pode, em geral, ser um rótulo para a polarização do campo eletromagnético, do vetor de propagação ou várias grandezas incorporadas no mesmo índice.

Podemos escrever o estado número como uma aplicação sucessiva de operadores criação ao estado de vácuo de forma que,

$$|n_k\rangle = \frac{\hat{a}_k^\dagger \dots \hat{a}_k^\dagger}{\sqrt{n_k!}} |0\rangle \quad n_k = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (3.31)$$

Pode-se verificar também que

$$\langle n_k | m_k \rangle = \delta_{n,m} \quad (3.32)$$

e também que,

$$\sum_{n_k} |n_k\rangle \langle n_k| = \hat{I} \quad (3.33)$$

ou seja, podemos verificar que a união de todos os operadores número forma um conjunto completo de observáveis. Podemos então obter a descrição completa do campo através dos números de ocupação de todos os infinitos modos, de forma que, para escrevermos um estado arbitrário  $|\psi\rangle$  na base de Fock, basta usarmos a expressão [21],

$$|\psi\rangle = \sum_{n_k} |n_k\rangle \langle n_k | \psi \rangle = \sum_{n_k} \langle n_k | \psi \rangle |n_k\rangle. \quad (3.34)$$

### 3.3 Estados Coerentes

Foi somente em 1926 que os estados coerentes foram vistos pela primeira vez em um estudo relacionado ao oscilador harmônico quântico desenvolvido por Erwin Schrodinger. No entanto, somente entre os anos de 1963 e 1965, através dos trabalhos de Glauber, sua compreensão, importância e utilidade foram reconhecidas. Glauber batizou estes estados de "coherent states" e seus trabalhos provaram a importância destes para o estudo da óptica quântica.

A coerência manifestada por estes estados pode ser entendida como a manutenção da incerteza da amplitude de campo elétrico na ausência de perdas. Esta característica de

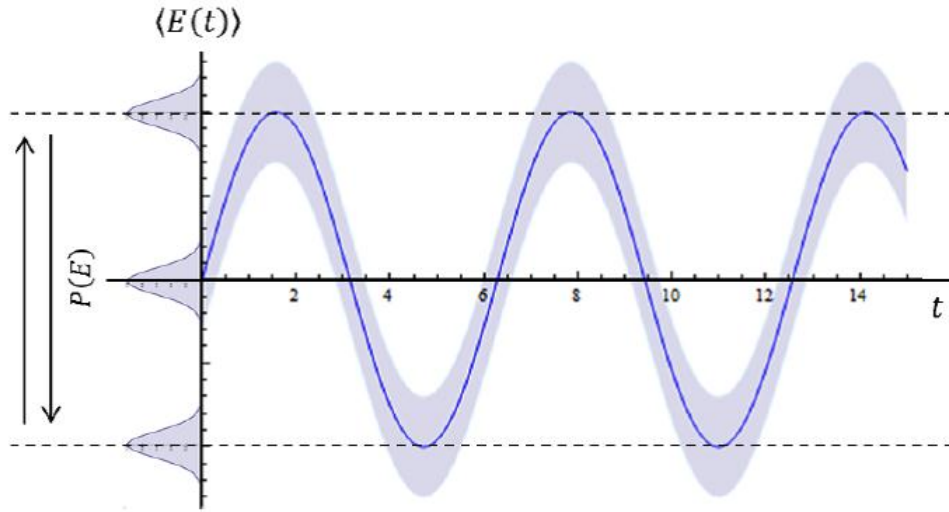


Figura 3.1: Representação da evolução temporal do campo elétrico e sua incerteza para um pulso de luz coerente, figura retirada da referência[1]

coerência pode ser observada no gráfico da fig. [3.1] A figura mostra que a medida de um campo elétrico, num grande ensemble de pulso de luz coerente (por exemplo), gera uma distribuição gaussiana cuja a largura se mantém durante todo tempo em que a medida é feita, somente a posição da distribuição de probabilidade da medida do campo elétrico que muda. O resultado em azul no gráfico representa a medida do campo elétrico clássico. Pode-se ver, então, que a coerência é algo natural em campos da física clássica, onde assume-se que a incerteza não é intrínseca ao próprio campo, mas sim ao procedimento de medida utilizado [23]. Podemos dizer então que os estados coerentes possuem características que se aproximam de situações clássicas. Essas características pode ser vistas também na equação de autovalores que, de acordo com o modo do campo eletromagnético, dá origem ao estado coerente,

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle. \quad (3.35)$$

A interpretação física desta equação diz que a remoção de um fóton do estado coerente não deve alterar o estado [24]. Se compararmos o estado coerente com um sistema clássico, sabemos que uma medida, na maioria das vezes, não altera o sistema assim como a medida também não alterou o estado coerente. Por esta analogia que pode ser observada entre os estados coerentes e os sistemas clássicos alguns autores costumam chamar este estado de estado clássico da luz.

Pode-se também representar os estados coerentes da luz em termos dos estados de Fock:

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle. \quad (3.36)$$

Aplicando o operador aniquilação  $\hat{a}$  neste estado obtemos,

$$\begin{aligned} \hat{a}|\alpha\rangle &= \hat{a} \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle \\ \hat{a}|\alpha\rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n \sqrt{n} |n-1\rangle. \end{aligned}$$

Definindo o índice de somatória como  $n = n' + 1$  e expandindo o ket à esquerda temos

$$\alpha \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle = \sum_{n'=0}^{\infty} c_{n'+1} \sqrt{n'+1} |n'\rangle. \quad (3.37)$$

Recorrendo à ortonormalidade dos estados de Fock, podemos verificar que a igualdade acima só é válida se

$$c_{n+1} \sqrt{n+1} = \alpha c_n. \quad (3.38)$$

Sendo esta uma relação de recorrência que pode levar ao seguinte resultado,

$$c_n = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} c_0. \quad (3.39)$$

Agora normalizando o estado coerente obtemos,

$$\langle\alpha|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n'=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \frac{(\alpha^*)^{n'}}{\sqrt{n'!}} |c_0|^2 \langle n|n'\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} |c_0|^2 = e^{|\alpha|^2} |c_0|^2 \quad (3.40)$$

e assim

$$\begin{aligned} e^{|\alpha|^2} |c_0|^2 &= 1 \\ |c_0|^2 &= e^{-|\alpha|^2/2}. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Com isso, obtemos os coeficientes  $c_n$  que torna possível a expansão dos estados coerentes (considerando  $c_0$  real):

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (3.42)$$

Logo, de acordo com a interpretação probabilística da Teoria Quântica, a probabilidade de o estado coerente possuir um fóton é dada por,

$$P(n) = |\langle n|\alpha\rangle| = \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} e^{-|\alpha|^2}. \quad (3.43)$$

### 3.3.1 O Operador Deslocamento de Glauber

Nessa seção iremos analisar o efeito do seguinte operador,

$$\hat{D}(\beta) = e^{(\beta\hat{a}^\dagger - \beta^*\hat{a})}, \quad (3.44)$$

que é conhecido como operador de Glauber, sobre um estado de vácuo  $|0\rangle$ , onde  $\beta$  é a amplitude complexa de um estado que iremos definir por  $|\beta\rangle$ . Para isso, usaremos a fórmula de Campbell - Baker - Hausdorff [26] que é dada por

$$e^{\hat{A}}e^{\hat{B}} = e^{(\hat{A} + \frac{1}{2}[\hat{A}, \hat{B}] + \frac{1}{12}[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] + \frac{1}{12}[\hat{B}, [\hat{B}, \hat{A}]] + \dots)} \quad (3.45)$$

onde  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$  são dois operadores quaisquer. Utilizando esta fórmula verificamos que a atuação do operador de Glauber sobre o estado de vácuo leva ao seguinte resultado,

$$\begin{aligned} \hat{D}(\beta)|0\rangle &= e^{(\beta\hat{a}^\dagger - \beta^*\hat{a})}|0\rangle \\ &= e^{-\frac{|\beta|^2}{2}} e^{\beta\hat{a}^\dagger} e^{\beta^*\hat{a}}|0\rangle \\ &= e^{-\frac{|\beta|^2}{2}} e^{\beta\hat{a}^\dagger}|0\rangle \\ &= e^{-\frac{|\beta|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\beta\hat{a}^\dagger)^n |0\rangle \\ &= e^{-\frac{|\beta|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n!}} (\beta)^n |0\rangle \end{aligned} \quad (3.46)$$

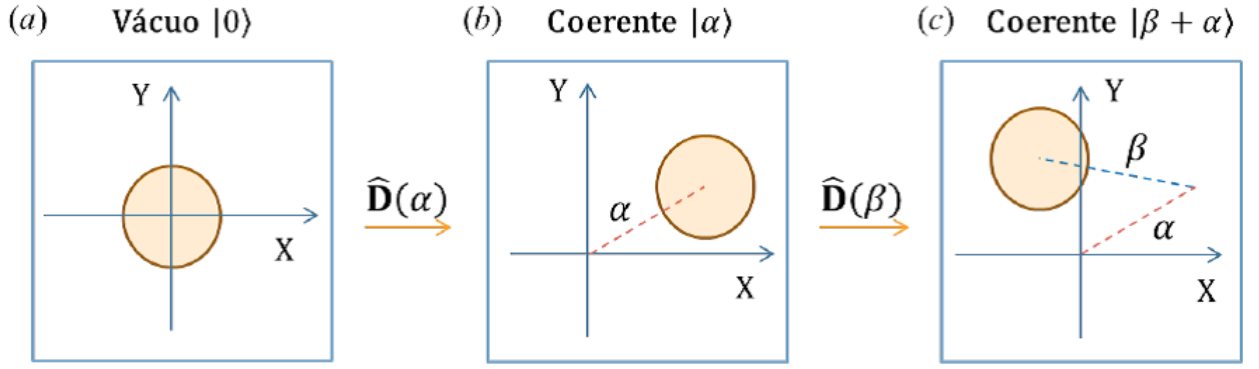


Figura 3.2: (a) Representação de um estado de vácuo  $|0\rangle$  no plano das quadraturas do campo. (b) Efeito do Operador Deslocamento de Glauber sobre o estado de vácuo, e (c) deslocamento do estado coerente de amplitude  $\alpha$  para  $\alpha + \beta$  (figura retirada da referência [1])

e, portanto

$$\hat{D}(\beta)|0\rangle = |\beta\rangle, \quad (3.47)$$

onde utilizamos as relações dos operadores aniquilação e criação [2.9] e também a expansão de um exponencial  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$ . O resultado acima mostra que a atuação do operador deslocamento de Glauber no vácuo o transforma em um estado coerente de amplitude complexa  $\beta$ .

Agora iremos analisar o efeito do operador deslocamento de Glauber ao atuar em um estado coerente  $|\alpha\rangle$ . Novamente, utilizando a fórmula [3.45] obtemos

$$\begin{aligned} \hat{D}(\beta)|\alpha\rangle &= \hat{D}(\beta)\hat{D}(\alpha)|0\rangle \\ &= e^{(\beta\hat{a}^\dagger - \beta^*\hat{a})} e^{(\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a})}|0\rangle \\ &= e^{\frac{1}{2}(\beta\alpha^* - \beta^*\alpha)} e^{(\beta+\alpha)\hat{a}^\dagger - (\beta+\alpha)^*\hat{a}}|0\rangle \\ &= e^{\frac{1}{2}(\beta\alpha^* - \beta^*\alpha)}|\beta + \alpha\rangle. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Verificamos assim que o deslocamento de um estado coerente gera outro estado coerente.

Na figura [3.2] podemos visualizar o significado do efeito do operador de Glauber atuando no vácuo, dado pelas equações [3.47] e [3.48], no plano das quadraturas do campo.

Uma outra transformação importante que ocorre pela atuação do operador deslocamento sobre os operadores de amplitude de campo pode ser obtida utilizando o lema de

Campbell - Baker - Hausdorff que é bastante utilizado em capítulos sobre álgebra de operadores em livros de mecânica quântica [25], Esta fórmula diz que, dado dois operadores  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$  e que não, necessariamente, comutem entre si, mas satisfaçam a relação

$$[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] = [\hat{B}, [\hat{A}, \hat{B}]] = 0 \quad (3.49)$$

é válida a expressão

$$e^{i\lambda\hat{A}}\hat{B}e^{-i\lambda\hat{A}} = \hat{B} + (i\lambda)[\hat{A}, \hat{B}] + \frac{i\lambda}{2!}[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] + \frac{i\lambda}{3!}[\hat{A}, [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]]] + \dots \quad (3.50)$$

Utilizando este lema podemos mostrar que

$$\hat{D}(\alpha)^{-1}\hat{a}\hat{D}(\alpha) = \hat{a} + \alpha \quad (3.51)$$

$$\hat{D}(\alpha)^{-1}\hat{a}^\dagger\hat{D}(\alpha) = \hat{a}^\dagger + \alpha^*. \quad (3.52)$$

As equações acima mostram que a união de todos os operadores deslocamentos forma um conjunto completo de operadores, desta forma, podemos expressar qualquer operador em termos destes [27].

Vamos agora mostrar que dois estados coerentes não são ortogonais entre si:

$$\begin{aligned} \langle \alpha | \beta \rangle &= [\hat{D}(\alpha)|0\rangle]^\dagger |\beta\rangle \\ &= \langle 0 | \hat{D}^\dagger(\alpha) | \beta \rangle \\ &= \langle 0 | \hat{D}(-\alpha) | \beta \rangle \\ &= \langle 0 | \beta - \alpha \rangle e^{\frac{1}{2}(\alpha^*\beta - \alpha\beta^*)} \\ &= e^{(-\frac{1}{2}|\alpha|^2 + \alpha^*\beta - \frac{1}{2}|\beta|^2)}. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Portanto, como pode ser checado na eq. [3.53], se  $|\alpha|^2$  e  $|\beta|^2$  forem relativamente grandes, estes dois estados coerentes serão aproximadamente ortogonais. Vale mencionar, neste momento, que o estado coerente é gerado em laboratório, com boa aproximação, em casos em que um dado laser esteja funcionando bem acima de seu limiar de oscilação laser.

Embora os estados coerentes não sejam, em geral, ortogonais entre si, ainda assim eles satisfazem a relação de completeza:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n| = \frac{1}{\pi} \int |\alpha\rangle\langle\alpha| d^2\alpha = \hat{I}. \quad (3.54)$$

Neste caso, vale mencionar que o  $d^2\alpha$  varrerá todo o plano complexo. A equação [3.54], juntamente com o produto escalar entre estados coerentes, mostra que qualquer estado coerente pode ser escrito em termos dos outros, ou seja, o conjunto dos estados coerentes é supercompleto [28].

## 3.4 Conceitos Básicos de Estados Emaranhados

Sistemas quânticos possuem certas propriedades que não possuem análogo clássico tais como a superposição de estados quânticos, interferência, tunelamento. Mas estas não são as únicas distinções que existe entre objetos clássicos e quânticos. Existem outras diferenças que se manifestam em sistemas quânticos compostos. Uma dessas diferenças são o emaranhamento que surgem em subsistemas quânticos e que dão origem às diferenças clássicas [29]. Nesta seção introduziremos as ferramentas básicas para entender os estados emaranhados quânticos.

### 3.4.1 Decomposição de Schmidt

Dado duas bases  $\{|\varphi_i\rangle\}$  e  $\{|\phi_i\rangle\}$  nos espaços  $H_1$  e  $H_2$ , qualquer estado  $|\psi\rangle$  em  $H = H_1 \otimes H_2$  pode ser expresso em termos do correspondente produto base.

$$|\psi\rangle = \sum_{ij} d_{ij} |\varphi_i\rangle \otimes |\phi_j\rangle. \quad (3.55)$$

A expansão dos coeficientes  $d_{ij}$  pode ser obtida através da sobreposição dos estados com o vetor de base,  $d_{ij} = (\langle\varphi_i| \otimes \langle\phi_j|) |\psi\rangle$ . Se agora fizermos a mudança de base  $|\tilde{\varphi}_i\rangle = U\varphi_i$  e  $|\tilde{\phi}_i\rangle = V\phi_i$ , com  $U$  e  $V$  arbitrário, a transformação  $H_1$  e  $H_2$ , respectivamente, leva  $d_{ij}$  a seguinte mudança:



$$\begin{aligned}
d_{ij} &= (\langle \tilde{\varphi}_i | \otimes \langle \tilde{\phi}_j |) |\psi\rangle \\
&= (\langle \varphi_i | U^\dagger \otimes \langle \phi_j | V^\dagger) |\psi\rangle \\
&= \sum_{pq} (\langle \varphi_i | U^\dagger | \varphi_p \rangle \langle \phi_j | V^\dagger | \phi_p \rangle \langle \varphi_p | \otimes \langle \varphi_p |) |\psi\rangle \\
&= [udv]_{ij}
\end{aligned} \tag{3.56}$$

onde no cálculo acima usamos a identidade,  $\sum_i |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i| = \hat{I}$  e  $\sum_i |\phi_i\rangle\langle\phi_i| = \hat{I}$  e definimos as matrizes unitárias  $u_{ip} = \langle\varphi_i|U|\varphi_p\rangle$ ,  $v_{qj} = \langle\phi_j|V^\dagger|\phi_q\rangle$ . Na nova base, os estados é obtido por

$$|\psi\rangle = \sum_{ij} [udv]_{ij} |\tilde{\varphi}_i\rangle \otimes |\tilde{\phi}_j\rangle. \tag{3.57}$$

Agora, para obter a decomposição de Schmidt de  $|\psi\rangle$  usamos o fato de que  $udv$  é diagonal [29]. Isto fornece os valores da decomposição singular de  $d$ , como sendo real, diagonal não negativa sobre  $S_i$  pode-se obter sempre uma base local  $|\varphi_i^S\rangle$  e  $|\phi_i^S\rangle$  e, nesse caso, [3.57] reduz-se a

$$|\psi\rangle = \sum_i \sqrt{\lambda_i} |\varphi_i^S\rangle \otimes |\phi_i^S\rangle, \tag{3.58}$$

onde o  $\lambda_i = S_i^2$  são conhecidos como coeficientes de Schmitdt, e a soma é limitada pela a dimensão do subsistema menor. Desde que as bases de Schmidt  $\{|\varphi_i^S\rangle \otimes |\phi_j^S\rangle\}$  é obtido pelos estados separáveis, toda informação no emaranhamento de um estado é encontrado nos coeficientes de Schmidt [29].

### 3.4.2 Estados Emaranhados

Um estado é dito ser emaranhado quando não pode ser decomposto num produto entre os seus modos. Em outras palavras um estado emaranhado é não separável. Para ficar mais claro, considere o seguinte estado normalizado:

$$\begin{aligned}
|\psi\rangle &= \frac{1}{2} [|1\rangle_1 |0\rangle_0 + |1\rangle_1 |1\rangle_0] \\
|\psi\rangle &= \frac{1}{2} |1\rangle_1 (|0\rangle_0 + |1\rangle_0)
\end{aligned} \tag{3.59}$$

verificamos que o estado acima não está emaranhado pois conseguimos separá-los em relação aos modos 1 e 0. Como o estado não está emaranhado, ele é dito ser separável. Agora considere um outro estado dado pela equação

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2}[|0\rangle_1|0\rangle_0 + |1\rangle_1|1\rangle_0]. \quad (3.60)$$

Esse estado é chamado de emaranhado pois não pode ser decomposto num produto de um estado do modo 1 por um estado do modo 0.

Os estados que verificamos, eqs. [3.59] e [3.60], são exemplos de sistemas compostos. Sistemas compostos são aqueles que naturalmente se decompõem em dois ou mais sistemas, onde cada sistema em si é um sistema adequado. Mais frequentemente, os subsistemas são caracterizados pelas suas distâncias que é maior que a dimensão de um subsistema. Formalmente, o espaço de Hilbert associado com um sistema composto, ou de múltiplas partes, é obtido pelo operador tensorial  $H_1 \otimes \dots H_N$  do espaço correspondendo a cada um dos subsistemas. Generalizando para um sistema com N-partículas em um estado puro  $\Psi(q_1, \dots q_N)$ , se desejarmos saber qual é o estado que a partícula está precisamos saber que a partícula não pode ser descrita por funções de onda, mas em um estado misturado. Considere um sistema compostos de dois subsistemas com coordenadas  $q_1$  e  $q_2$  para cada subsistema, respectivamente. Suponha que todo sistema seja um estado puro  $|\psi_{12}\rangle$ , e usamos a coordenada na qual o estado é representado pela a autofunção  $\psi(q_1, q_2)$  e portanto  $\rho_{12} = |\psi_{12}\rangle\langle\psi_{12}|$ . Na representação da coordenada temos que,

$$\langle q_1 q_2 | \hat{\rho}_{12} | q_1 q_2 \rangle = \langle q_1 q_2 | \psi_{12} \rangle \langle \psi_{12} | q_1 q_2 \rangle = \psi(q_1, q_2) \psi^*(q_1, q_2) \quad (3.61)$$

portanto, o subsistema 1 não está em um estado puro. Isto leva ao estado misturado descrito pela matriz densidade

$$\hat{\rho} = Tr_2 \rho_{12} \quad (3.62)$$

onde  $Tr_2$  é o traço parcial sobre o grau de liberdade da partícula 2. Na representação da coordenada,

$$\langle q_1 | \rho_1 | q_1 \rangle = \int dq_2 \langle q_1 q_2 | \rho_{12} | q_1 q_2 \rangle = \int dq_2 \psi(q_1, q_2) \psi^*(q_1, q_2). \quad (3.63)$$

Considere agora um operador  $\hat{A}_1$  que somente depende de  $q_1$  do subsistema 1, isto é,

$$\langle q_1 q_2 | \hat{A}_1 | q'_1 q'_2 \rangle = \langle q'_1 | \hat{A}_1 | q_1 \rangle \delta(q_2 - q'_2). \quad (3.64)$$

Portanto, para o estado de  $|\psi_{12}\rangle$  o valor esperado de  $A_1$  é dado por

$$\begin{aligned} \langle \psi_{12} | \rho_{12} | \psi_{12} \rangle &= \int dq_1 dq_2 dq'_1 dq'_2 \langle \psi_{12} | q_1 q_2 \rangle \langle q_1 q_2 | A_1 | q'_1 q'_2 \rangle \langle q'_1 q'_2 | \psi_{12} \rangle \\ &= \int dq_1 dq'_1 dq_2 \psi^*(q_1, q_2) \langle q_1 | A_1 | q'_1 \rangle \psi(q_1, q_2) \\ &= \int dq_1 dq'_1 \langle q_1 | A_1 | q'_1 \rangle \langle q'_1 | \rho_1 | q_1 \rangle \\ &= \text{Tr}_1(\rho_1 A_1). \end{aligned} \quad (3.65)$$

Somente se  $|\psi_{12}\rangle$  puder ser fatorado entre um produto de  $|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle$  onde  $|\psi_1\rangle$  e  $|\psi_2\rangle$  são estados puro para o subsistema 1 e 2, respectivamente, então  $\hat{\rho}_1 = |\psi_1\rangle\langle\psi_1|$  descreve um estado puro. Neste caso, podemos dizer que não existe estado emaranhado no sistema 1 e 2. Por outro lado, dizemos que os subsistemas 1 e 2 estão emaranhando, e  $\rho_1$  descreve um estado misturado para o subsistema 1. Em geral, de acordo a decomposição de Schmidt, qualquer estado pode ser decomposto como [29],

$$|\psi_{12}\rangle = \sum_{i=0}^n c_i |\psi_{1,i}\rangle \otimes |\psi_{2,i}\rangle \quad (3.66)$$

onde  $|\psi_{1,i}\rangle$  ( $i = 1, n$ ) são ortogonal com cada um dos outros para o subsistema 1, e então fazemos  $|\psi_{2,i}\rangle$  ( $i = 1, n$ ) para o subsistema 2. Então temos

$$\hat{\rho}_1 = \sum_i \rho_i |\psi_{1,i}\rangle\langle\psi_{1,i}| \quad (3.67)$$

com  $\rho_i = |c_i|^2$ . Se existem mais que um termo de  $c_i = 0$ ,  $\text{Tr}[\hat{\rho}_1^2] = \sum_i |c_i|^4 < 1$  então podemos dizer que o subsistema 1 estar em um estado misturado. De forma geral, existe, principalmente em áreas como a informação quântica, uma série de critérios para analisar se um sistema é ou não emaranhado. Neste capítulo discutiremos o critério de Simon [30].

### 3.4.3 Critério de Simon

O critério de Simon é baseado na demonstração de que a operação de transposição do operador densidade está relacionada a uma reflexão no espaço de fase. Simon chegou a este resultado estudando o sistema de dois modos do oscilador Harmônico bosônico com o objetivo de encontrar uma forma mais operacional do critério de Peres - Horodecki. Já o critério de Peres - Horodecki é o resultado de dois trabalhos importantes. O primeiro foi desenvolvido por Asher Peres [31] o qual demonstrou que a positividade da transposição parcial do operador densidade é uma condição necessária para a separabilidade de um estado quântico e conjecturou a suficiência. O segundo foi desenvolvido pela família Horodecki [32] que demonstrou que,  $\dim(H_A \otimes H_B) \leq 6$ , a suficiência é válida. Assim o critério de Simon pode ser visto a partir da operação de transposição do operador densidade relacionada ao espaço de fase:

$$\rho \rightarrow \rho^T \Leftrightarrow W(q, p) \rightarrow W(q, -p). \quad (3.68)$$

Podemos também buscar uma relação semelhante utilizando a notação simplética para descrever esse sistema de dois modos do oscilador harmônico:

$$\xi = (q_1, p_1, q_2, p_2); \quad [\xi_\alpha, \xi_\beta] = i\Omega_{\alpha,\beta} \quad (3.69)$$

onde

$$\Omega = \begin{bmatrix} J & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix}; \quad J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}; \quad (3.70)$$

Vamos definir a matriz variância como sendo,

$$V = \langle \{\Delta\xi_\alpha, \Delta\xi_\beta\} \rangle \quad (3.71)$$

onde  $\Delta\xi_\alpha = \xi_\alpha - \langle \xi_\alpha \rangle$  e  $\langle \xi_\alpha \rangle = \text{Tr}\xi_\alpha$ . Assim, podemos observar que [33]

$$V + \frac{i}{2}\Omega \geq 0. \quad (3.72)$$

Pode-se observar que a operação de reflexão sobre o operador densidade leva a obtenção da matriz variância a partir de uma transformação de similaridade, de modo que,

$$\Lambda V \Lambda + \frac{i}{2} \Omega \geq 0, \quad (3.73)$$

onde  $\Lambda$  representa a reflexão no espaço de fase. É importante notar também que a matriz simplética é invariante sobre esta transformação de similaridade. Utilizando o grupo simplético  $S_p(4, R)$  que mantém inalterada a estrutura simplética agindo unitariamente, obtemos as seguintes relações,

$$\begin{aligned} S &\in S_p(, R) & S \Omega S^T &= \Omega \\ \xi &\rightarrow \xi' = S\xi & [\xi'_\alpha, \xi'_\beta] &= i\Omega_{\alpha,\beta}. \end{aligned} \quad (3.74)$$

E, assim, a operação de transposição parcial, que está associada a reflexão no espaço de fase, pode ser escrito como

$$\rho \rightarrow U(S)\rho U^\dagger(S) \Leftrightarrow W(\xi) \rightarrow W(S^{-1}\xi). \quad (3.75)$$

Para obter uma condição para a separabilidade do sistema podemos escrever a transformação simplética como sendo,

$$S_{local} \in S_p(2, R) \times S_p(2, R) \subset S_p(4, R) \quad (3.76)$$

onde

$$S_{local} = \begin{bmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_2 \end{bmatrix}; \quad S_2 J S_2^T = J \quad (3.77)$$

que é a condição necessária e suficiente para que  $S_{local}$  mantenha a estrutura simplética. Utilizando propriedades da invariância podemos escrever a variância em forma de matriz como,

$$V = \begin{bmatrix} A & C \\ C^T & B \end{bmatrix}; \quad (3.78)$$

onde A, B e C são matrizes 2X2. Com a atuação de  $S_{local}$ , podemos escrever [3.78] como,

$$V = \begin{bmatrix} a & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & a & 0 & c_2 \\ c_1 & 0 & b & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & b \end{bmatrix}; \quad (3.79)$$

Substituindo [3.79] em [3.72] obtemos,

$$4(ab - c^2) \geq (a^2 + b^2) + 2c_1c_2 - 1/4 \quad (3.80)$$

que também pode ser escrito como,

$$\det(A)\det(B) + \left(\frac{1}{4} - \det(C)\right)^2 - \text{Tr}(AJCJBJC^T) \geq \frac{1}{4}(\det(A) + \det(B)). \quad (3.81)$$

Se substituirmos  $\det(C)$  por  $|\det(C)|$  veremos que a relação [3.72] também pode ser satisfeita pela matriz variância, já que a transformação associada a reflexão inverte o sinal de  $\det(C)$ . Logo, temos que

$$\det(A)\det(B) + \left(\frac{1}{4} - |\det(C)|\right)^2 - \text{Tr}(AJCJBJC^T) \geq \frac{1}{4}(\det(A) + \det(B)). \quad (3.82)$$

A relação [3.82] é o critério de Simon e é satisfeito por estados separáveis. Além do critérios de Simon existem outros critérios muitos utilizados dentro da teoria da Informática quântica para caracterizar o emaranhamento num sistema. Alguns desses critérios são: Critério de Peres, Critério de Horodecki, critério reduzido e outros [34].

### 3.4.4 Matriz Densidade Parcial Reduzida

Os coeficientes de Schmidt podem ser utilizados como um parâmetro para distinguir se um estado é emaranhado ou separável. A matriz densidade reduzida entra como um reforço deste contexto.

$$\begin{aligned}
\hat{\rho}_1 &= Tr_2 |\psi\rangle\langle\psi| \\
&= Tr_2 \sum_{ij} \sqrt{\lambda_i \lambda_j} (|\varphi_i^S\rangle_{11} \langle\varphi_j^S|) \otimes |(\phi_i^S)\rangle_{22} \langle\phi_j^S|.
\end{aligned} \tag{3.83}$$

Se desejarmos calcular a média do número de fótons em relação à média da matriz parcial reduzida acima usamos a seguinte expressão:

$$Tr_1 [a_1^\dagger a_1] |\psi\rangle\langle\psi| = \sum_{n=0}^{\infty} {}_1\langle n | a_1^\dagger a_1 | \psi \rangle \langle \psi | n \rangle_1 \tag{3.84}$$

que, como veremos no capítulo seguinte, a equação [3.84] pode representar a média do número de fótons em uma das saídas de um beam splitter.

# Capítulo 4

## Beam Splitter e Interferômetro de Mach - Zehnder

Neste capítulo iremos mostrar a descrição quântica do Beam Splitter e como podemos adaptar os resultados para o interferômetro de Mach-Zehnder.

### 4.1 4.1. Interferência no Beam Splitter

Basicamente BSs são elementos que redirecionam um feixe de luz e permite o resto do feixe continuar seu percurso original. Num BS a luz incidente é parcialmente transmitida e parcialmente refletida. Para descrever analiticamente como os estados de luz são transformados ao passar pelo BS devemos verificar como os operadores de campos são transformados. A fig. [4.1] mostra um esquema que representa como ocorre esta transformação em uma descrição quântica [7].

O esquema da figura representa um beam Splitter geral com coeficiente de reflexão complexa  $r$  e  $r'$  e coeficiente de transmissão  $t$  e  $t'$ . Matematicamente, no quadro de Heisenberg, o operador aniquilação transforma-se de acordo com as seguintes relações,

$$\hat{a}_3 = r\hat{a}_1 + t'\hat{a}_0, \quad \hat{a}_4 = t\hat{a}_1 + r'\hat{a}_0. \quad (4.1)$$

Ou, semelhantemente como

$$\begin{bmatrix} \hat{a}_3 \\ \hat{a}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t' & r \\ r' & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a}_0 \\ \hat{a}_1 \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} \hat{a}_0 \\ \hat{a}_1 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$



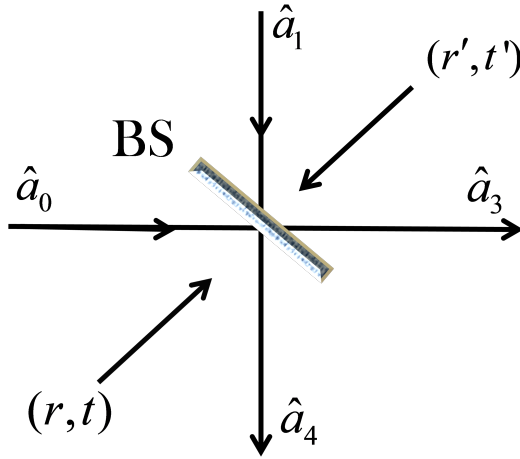


Figura 4.1: Descrição Quântica de um Beam Splitter

onde os índices indicam os modos correspondentes e  $B$  é a matriz de dispersão unitária. De acordo com [35], podemos obter as seguintes relações de reciprocidade,

$$|r'| = |r|, \quad |t'| = |t|, \quad |r|^2 = |t|^2 = 1, \quad r^*t' + r't'^* = 0 \text{ e } r^*t + r't'^* = 0. \quad (4.3)$$

A relação [4.3] pode também ser obtida na base da conservação da energia.

## 4.2 Analisando Alguns Casos de Interferência em um Beam Splitter

Nesta seção iremos calcular analiticamente e estudar 5 casos simples envolvendo estados de Fock no vácuo e de um único fóton, e estados coerentes na entrada do (BS). Calcularemos as matrizes densidades totais e parciais e as utilizaremos para realizar cálculos correspondentes à média de fótons. Embora sejam casos simples, nosso objetivo é tornar os próximos resultados mais "intuitivos", utilizarmos os resultados parciais daqui e correlacionarmos com trabalhos realizados na literatura. Cabe mencionar que os casos analisados neste trabalho foram publicados em diversos trabalhos distintos. Nossa ideia é,

dentro de um contexto de revisão bibliográfica, explicitar os mais importantes e também aqueles que utilizaremos em nosso trabalho, tudo neste capítulo.

**i) Caso 1:**  $|\psi\rangle = |\alpha\rangle_0 \otimes |0\rangle_1$

Para este caso, iremos utilizar como estado total do feixe de luz na entrada do BS a expressão matemática que definimos como

$$|\psi\rangle = |\alpha\rangle_0 |0\rangle_1. \quad (4.4)$$

A expressão [4.4], é o produto direto dado por,  $|\psi\rangle = |\alpha\rangle_0 \otimes |0\rangle_1$ . No entanto, neste trabalho para facilitar a notação não utilizaremos o símbolo do produto direto  $\otimes$ . Assim, nesta dissertação, expressões desse tipo podem ser entendidas como produto direto.

Ainda na expressão [4.4] o estado  $|\alpha\rangle_0$  representa um estado coerente incidente no modo 0 e o estado  $|0\rangle_1$  representa o estado do vácuo incidente no modo 1. Cada modo está relacionado a probabilidade do feixe de luz ser refletido ou transmitido ao passar pelo BS, como mostra a fig. [4.2].

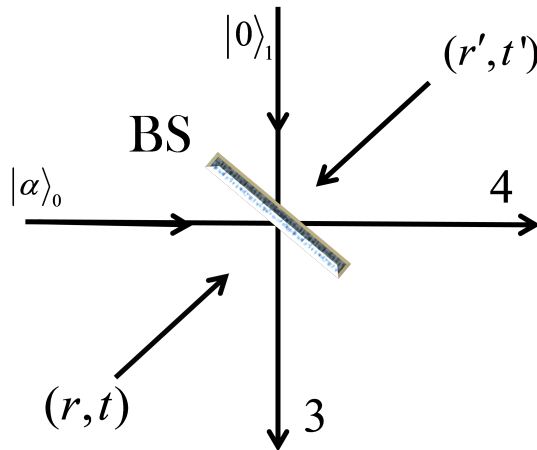


Figura 4.2: Beam splitter (BS) com um estado coerente  $|\alpha\rangle_0$  e um estado de vácuo  $|0\rangle_1$  em seus modos de entradas.

Ao passar pelo BS, o estado de entrada é transformado no estado de saída da seguinte forma,

$$\begin{aligned}
|\alpha\rangle_0|0\rangle_1 &= e^{\alpha\hat{a}_0^\dagger - \alpha^*\hat{a}_0}|0\rangle_0|0\rangle_1 \xrightarrow{BS} \exp[\alpha(t'\hat{a}_3^\dagger + r'\hat{a}_4^\dagger) - \alpha^*(t'^*\hat{a}_3 + r'^*\hat{a}_4)]|0\rangle_3|0\rangle_4 \\
&= \exp[\alpha t'\hat{a}_3^\dagger - \alpha^*t'^*\hat{a}_3] \exp[\alpha r'\hat{a}_4^\dagger - \alpha^*r'^*\hat{a}_4]|0\rangle_3|0\rangle_4 \\
&= \hat{D}_3(t'\alpha)\hat{D}_4(r'\alpha)|0\rangle_3|0\rangle_4
\end{aligned} \tag{4.5}$$

onde fizemos  $\hat{D}_3(t'\alpha) = \exp[\alpha t'\hat{a}_3^\dagger - \alpha^*t'^*\hat{a}_3]$  e  $\hat{D}_4(r'\alpha) = \exp[\alpha r'\hat{a}_4^\dagger - \alpha^*r'^*\hat{a}_4]$  que são os operadores deslocamento dependentes dos coeficientes de transmissão e reflexão, respectivamente.

Denotaremos o estado de saída por  $|\psi_{34}^{out}\rangle$  que, para este caso, será

$$|\psi_{34}^{out}\rangle = \hat{D}_3(t'\alpha)\hat{D}_4(r'\alpha)|0\rangle_3|0\rangle_4. \tag{4.6}$$

A equação [4.6] é, evidentemente, o mesmo obtido em estudos envolvendo campo de luz descrito classicamente, onde a intensidade é dividida entre os dois modos de saída [7]. Além disso, notamos também que a saída não representa um estado emaranhado.

O operador densidade para o estado de saída é dado por

$$\rho_{34} = \hat{D}_3(t'\alpha)\hat{D}_4(r'\alpha)|0\rangle_3|0\rangle_4\langle 0|_3\langle 0|_4\hat{D}_3^\dagger(t'\alpha)\hat{D}_4^\dagger(r'\alpha). \tag{4.7}$$

Para obter somente o modo de saída 4, devemos encontrar a matriz densidade reduzida tomando o traço parcial sobre a saída 3 (soma no modo 3), ou seja,

$$\begin{aligned}
\rho_4 &= \hat{D}_4(r'\alpha)Tr_3(\hat{D}_3(t'\alpha)|0\rangle_3|0\rangle_4\langle 0|_3\langle 0|_4\hat{D}_3^\dagger(t'\alpha)\hat{D}_4^\dagger(r'\alpha)) \\
&= \hat{D}_4(r'\alpha)Tr_3(\hat{D}_3^\dagger(t'\alpha)\hat{D}_3(t'\alpha)|0\rangle_3|0\rangle_4\langle 0|_3\langle 0|_4)\hat{D}_4^\dagger(r'\alpha) \\
&= \hat{D}_4(r'\alpha)\sum_{n=0}^{\infty}\langle n|_3(|0\rangle_3|0\rangle_4\langle 0|_3\langle 0|_4)|n\rangle_3\hat{D}_4^\dagger(r'\alpha)
\end{aligned} \tag{4.8}$$

onde fizemos uso da regra na qual o traço é invariante sob permutações cíclicas,  $Tr(ABC) = Tr(CAB)$  e também da relação unitária  $\hat{D}_3(t'\alpha)\hat{D}_3^\dagger(t'\alpha) = \hat{I}$ . Utilizando algumas manipulações algébricas obtemos que

$$\rho_4 = |r'\alpha\rangle_4\langle r'\alpha|_4 \tag{4.9}$$

onde fizemos  $\hat{D}_4(r'\alpha)|0\rangle_4 = |r'\alpha\rangle_4$ . Semelhantemente, para obtermos o modo de saída 3 basta encontrar a matriz densidade reduzida tomando o traço parcial sobre a saída 4. Nesse caso, utilizamos passos análogos aos anteriores para obter,

$$\hat{\rho}_3 = |t'\alpha\rangle_3\langle t'\alpha|_3 \quad (4.10)$$

onde, analogamente ao modo 4, fizemos  $\hat{D}_3^\dagger(t'\alpha)|0\rangle_3 = |t'\alpha\rangle_3$ . Podemos dizer também que o resultado obtido em [4.10] é um estado deslocado identicamente puro ou, mais especificamente, um estado coerente (vácuo deslocado). É importante notar que o deslocamento do estado acima depende do coeficiente de transmissão  $t'$  do BS.

O número médio de fótons para a matriz reduzida pode ser calculado como se segue

$$\begin{aligned} \langle n \rangle_4 &= \text{Tr}_4(a_4^\dagger a_4 \hat{\rho}_4) \\ &= \text{Tr}_4(a_4^\dagger a_4 |r'\alpha\rangle_4 \langle r'\alpha|_4) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \langle n|_4 a_4^\dagger a_4 |r'\alpha\rangle_4 \langle r'\alpha|_4 |n\rangle_4 \\ &= \langle r'\alpha|_4 a_4^\dagger a_4 |r'\alpha\rangle_4 \\ &= |r'\alpha|^2, \end{aligned} \quad (4.11)$$

e, semelhantemente, para a outra saída obtemos um resultado análogo:

$$\langle n \rangle_3 = |t'\alpha|^2. \quad (4.12)$$

Podemos também calcular facilmente a média do número de fótons para um caso particular de BS considerando que ele seja 50:50. Para este caso  $t = t' = 1/\sqrt{2}$  e  $r = r' = i/\sqrt{2}$ . Assim, a matriz densidade e a média do número de fótons para cada modo:

$$\hat{\rho}_4 = \left| \frac{i\alpha}{\sqrt{2}} \right\rangle_4 \left\langle \frac{i\alpha}{\sqrt{2}} \right|_4 \quad (4.13)$$

$$\hat{\rho}_3 = \left| \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \right\rangle_3 \left\langle \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \right|_3 \quad (4.14)$$

$$\langle n \rangle_4 = \langle n \rangle_3 = \frac{|\alpha|^2}{2}. \quad (4.15)$$

Embora relativamente simples, este é um resultado importante, pois revela o aspecto contido no caso clássico, onde podemos observar claramente que metade da média do número de fótons,  $\frac{|\alpha|^2}{2}$ , emerge em cada modo. Para continuarmos nossos cálculos, vamos "injetar" em um dos modos do BS um caso puramente quântico e no outro novamente o estado coerente. Isto será feito a seguir.

Para mostrar os principais resultados obtidos neste caso desenvolvemos logo abaixo uma tabela que mostra os operadores densidades parciais e a média do número de fótons para qualquer valor dos coeficientes de transmissão e reflexão e também para o caso particular onde há 50% de transmissão e 50% de reflexão.

Resultados obtidos: Caso 1		
	MODO 3	MODO 4
Operador Densidade Parcial (ODP)	$\rho_3 =  t'\alpha\rangle_3 \langle t'\alpha _3$	$\rho_4 =  r'\alpha\rangle_4 \langle r'\alpha _4$
(ODP) 50:50	$\rho_3 = \left  \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \right\rangle_3 \left\langle \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \right _3$	$\rho_4 = \left  \frac{i\alpha}{\sqrt{2}} \right\rangle_4 \left\langle \frac{i\alpha}{\sqrt{2}} \right _4$
Média do Número de fótons (MNF)	$\langle n \rangle_3 =  t'\alpha ^2$	$\langle n \rangle_4 =  r'\alpha ^2$
(MNF) 50:50	$\langle n \rangle_3 = \frac{ \alpha ^2}{2}$	$\langle n \rangle_4 = \frac{ \alpha ^2}{2}$

Tabela 4.1: Resultados obtidos: Caso 1

**ii) Caso 2:**  $|\psi_{01}^{in}\rangle = |\alpha\rangle_0 |1\rangle_1$

Este caso foi desenvolvido em [8]. Portanto, iremos reproduzi-los detalhadamente para, posteriormente, correlacionar com os nossos resultados. Como dito anteriormente, para este caso, iremos manter o estado coerente na porta do modo 1 e substituir o vácuo por um estado de Fock de um único fóton (ver figura abaixo). O estado de entrada é dado por,

$$|\psi_{01}^{in}\rangle = |\alpha\rangle_0 |1\rangle_1. \quad (4.16)$$

Ao passar pelo BS temos a seguinte transformação:

$$\begin{aligned}
|\alpha\rangle_0|1\rangle_1 &= e^{\alpha\hat{a}_0^\dagger - \alpha^*\hat{a}_0}\hat{a}_1^\dagger|0\rangle_0|0\rangle_1 \xrightarrow{BS} \exp[\alpha(t'\hat{a}_3^\dagger + r'\hat{a}_4^\dagger) - \alpha^*(t'^*\hat{a}_3 + r'^*\hat{a}_4)](r\hat{a}_3^\dagger + t\hat{a}_4^\dagger)|0\rangle_3|0\rangle_4 \\
&= \exp[\alpha t'\hat{a}_3^\dagger - \alpha^*t'^*\hat{a}_3] \exp[\alpha r'\hat{a}_4^\dagger - \alpha^*r'^*\hat{a}_4](r\hat{a}_3^\dagger + t\hat{a}_4^\dagger)|0\rangle_3|0\rangle_4 \\
&= \hat{D}_3(t'\alpha)\hat{D}_4(r'\alpha)(r\hat{a}_3^\dagger + t\hat{a}_4^\dagger)|0\rangle_3|0\rangle_4
\end{aligned} \tag{4.17}$$

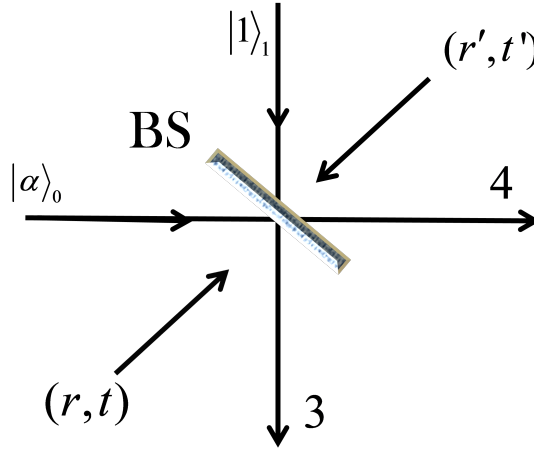


Figura 4.3: Beam splitter (BS) com um estado coerente  $|\alpha\rangle_0$  e um estado de um único fóton  $|1\rangle_1$  em seus modos de entradas.

O estado de saída fica dado por:

$$|\psi_{34}^{out}\rangle = \hat{D}_3(t'\alpha)\hat{D}_4(r'\alpha)(r\hat{a}_3^\dagger + t\hat{a}_4^\dagger)|0\rangle_3|0\rangle_4. \tag{4.18}$$

Assim, podemos obter o operador densidade para este estado de saída como,

$$\hat{\rho}_{34} = \hat{D}_3(t'\alpha)\hat{D}_4(r'\alpha)(r\hat{a}_3^\dagger + t\hat{a}_4^\dagger)|0\rangle_3|0\rangle_4\langle 0|_3\langle 0|_4(r^*\hat{a}_3 + t^*\hat{a}_4)\hat{D}_4^\dagger(r'\alpha)\hat{D}_3^\dagger(t'\alpha). \tag{4.19}$$

Novamente, a matriz densidade reduzida, considerando somente o modo de saída 4 é dado

tomando o traço parcial em relação ao modo de saída 3, ou seja,

$$\begin{aligned}
\hat{\rho}_4 &= \hat{D}_4(r'\alpha)Tr_3(\hat{D}_3(t'\alpha)(r\hat{a}_3^\dagger + t\hat{a}_4^\dagger)|0\rangle_3|0\rangle_4\langle 0|_3\langle 0|_4(r^*\hat{a}_3 + t^*\hat{a}_4)\hat{D}_3^\dagger(t'\alpha))\hat{D}_4^\dagger(r'\alpha) \\
&= \hat{D}_4(r'\alpha)Tr_3(\hat{D}_3^\dagger(t'\alpha)\hat{D}_3(t'\alpha)(r\hat{a}_3^\dagger + t\hat{a}_4^\dagger)|0\rangle_3|0\rangle_4\langle 0|_3\langle 0|_4(r^*\hat{a}_3 + t^*\hat{a}_4))\hat{D}_4^\dagger(r'\alpha) \\
&= \hat{D}_4(r'\alpha)Tr_3((r\hat{a}_3^\dagger + t\hat{a}_4^\dagger)|0\rangle_3|0\rangle_4\langle 0|_3\langle 0|_4(r^*\hat{a}_3 + t^*\hat{a}_4))\hat{D}_4^\dagger(r'\alpha)
\end{aligned} \tag{4.20}$$

onde, como antes, usamos a propriedade cíclica do traço e a unicidade do operador deslocamento. Após algumas manipulações algébricas obtemos,

$$\hat{\rho}_4 = |r|^2|r'\alpha\rangle_4\langle r'\alpha|_4 + |t|^2\hat{D}_4(r'\alpha)|1\rangle_4\langle 1|_4\hat{D}_4^\dagger(r'\alpha). \tag{4.21}$$

O resultado anterior é um estado misturado que representa uma combinação de dois estados deslocado identicamente puro: Um estado coerente (vácuo deslocado) e um estado de Fock deslocado. A expressão também mostra que o deslocamento e o peso (probabilidade clássica) de cada estado puro dependem dos coeficientes de reflexão e transmissão do BS. Para a outra porta de saída, obtemos um resultado análogo,

$$\hat{\rho}_3 = |t|^2|t'\alpha\rangle_3\langle t'\alpha|_3 + |r|^2\hat{D}_3(t'\alpha)|1\rangle_3\langle 1|_3\hat{D}_3^\dagger(t'\alpha). \tag{4.22}$$

Para calcular a média do número de fótons na porta de saída 4 iremos usar inicialmente o termo deslocado indicado pelo primeiro termo da expressão  $\rho_4$ , ou seja,

$$Tr_4(\hat{a}_4^\dagger\hat{a}_4|r'\alpha\rangle_4\langle r'\alpha|_4) = \sum_{n=0}^{\infty}\langle n|_4\hat{a}_4^\dagger\hat{a}_4|r'\alpha\rangle_4\langle r'\alpha|_4|n\rangle_4 = |r'\alpha|^2. \tag{4.23}$$

Agora tomaremos o segundo termo correspondente ao estado de Fock deslocado

$$\sum_{n=0}^{\infty}\langle n|\hat{a}_4^\dagger\hat{a}_4\hat{D}_4(r'\alpha)|1\rangle_4\langle 1|_4\hat{D}_4^\dagger(r'\alpha)|n\rangle_4 = \langle 1|_4\hat{D}_4^\dagger(r'\alpha)\hat{a}_4^\dagger\hat{a}_4\hat{D}_4(r'\alpha)|1\rangle_4 = 1 + |r'\alpha|^2 \tag{4.24}$$

onde usamos nas últimas duas equações a propriedade  $\hat{a}\hat{D}(r'\alpha) = \hat{D}(r'\alpha)(\hat{a} - r'\alpha)$  que provém do lema de cambell- Backer - Hausdorff, eq. [3.50]. Além disso, também usamos o fato de que  $\hat{D}^\dagger(r'\alpha)\hat{D}(r'\alpha) = 1$ . E assim, juntando os termos, e levando em consideração que  $|r|^2 + |t|^2 = 1$  obtemos a média do número de fótons para a modo de saída 4, ou seja,

$$\langle n \rangle_4 = |r|^2 |r' \alpha|^2 + |t|^2 (1 + |r' \alpha|^2) \quad (4.25)$$

$$\langle n \rangle_4 = |t|^2 + |r' \alpha|^2. \quad (4.26)$$

De forma semelhante, obtemos a média do número de fótons para o modo de saída 3 como sendo

$$\langle n \rangle_3 = |r|^2 + |t' \alpha|^2. \quad (4.27)$$

Se, como antes, considerarmos o caso particular do BS 50:50, as expressões para as densidades parciais em relação a cada porta de saída e o número de fótons assumem a seguinte forma:

$$\hat{\rho}_4 = \frac{1}{2} \left| \frac{i\alpha}{\sqrt{2}} \right\rangle_4 \left\langle \frac{i\alpha}{\sqrt{2}} \right|_4 + \frac{1}{2} \hat{D}_4(r' \alpha) |1\rangle_4 \langle 1|_4 \hat{D}_4^\dagger(r' \alpha) \quad (4.28)$$

$$\hat{\rho}_3 = \frac{1}{2} \left| \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \right\rangle_3 \left\langle \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \right|_3 + \frac{1}{2} \hat{D}_3(r' \alpha) |1\rangle_3 \langle 1|_3 \hat{D}_3^\dagger(r' \alpha) \quad (4.29)$$

e, também

$$\langle n \rangle_3 = \langle n \rangle_4 = \frac{1}{2} (1 + |\alpha|^2). \quad (4.30)$$

No primeiro caso colocamos um estado coerente em um dos modos de entradas e o vácuo em outra. Já no segundo caso colocamos também um estado coerente em uma das entradas, mas, na outra entrada, colocamos um único fóton. Podemos notar que a diferença entre os operadores densidades dos dois casos é que no segundo aparece um termo correspondente ao estado de Fock deslocado, segundo termo das equações [4.24] e [4.25]. Se substituirmos 1 por 0, no segundo termo da equação [4.21] obtemos o seguinte resultado:



$$\begin{aligned}
\hat{\rho}_4 &= |r|^2|r'\alpha\rangle_4\langle r'\alpha|_4 + |t|^2\hat{D}_4(r'\alpha) \underbrace{|0\rangle_4}_{1\rightarrow 0} \underbrace{\langle 0|_4}_{1\rightarrow 0} \hat{D}_4^\dagger(r'\alpha) \\
&= |r|^2|r'\alpha\rangle_4\langle r'\alpha|_4 + |t|^2|r'\alpha\rangle_4\langle r'\alpha|_4 \\
&= |r'\alpha\rangle_4\langle r'\alpha|_4(|t|^2 + |r|^2) \\
&= |r'\alpha\rangle_4\langle r'\alpha|_4
\end{aligned}$$

onde o índice  $1 \rightarrow 0$  abaixo da equação acima significa que estamos trocando o estado de um único fóton pelo o estado de vácuo.

Semelhantemente, para a densidade  $\rho_3$  obtemos seguindo o mesmo raciocínio que,

$$\hat{\rho}_3 = |t'\alpha\rangle_3\langle t'\alpha|_3$$

que é a mesma equação obtida no caso 1, eq. [4.10]. Os resultados acima mostram então que, se retirarmos o fóton que adicionamos no termo correspondente ao deslocamento de Fock das equações [4.21] e [4.22], os resultados obtidos são reduzidos ao caso 1.

<b>Resultados obtidos: Caso 2</b>		
	MODO 3	MODO 4
(ODP)	$\hat{\rho}_3 =  t ^2 t'\alpha\rangle_3\langle t'\alpha _3 +  r ^2\hat{D}_3(t'\alpha) 1\rangle_3\langle 1 _3\hat{D}_3^\dagger(t'\alpha)$	$\hat{\rho}_4 =  r ^2 r'\alpha\rangle_4\langle r'\alpha _4 +  t ^2\hat{D}_4(r'\alpha) 1\rangle_4\langle 1 _4\hat{D}_4^\dagger(r'\alpha)$
(ODP) 50:50	$\hat{\rho}_3 = \frac{1}{2}\left \frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right\rangle_3\left\langle\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right _4 + \frac{1}{2}\hat{D}_3(r'\alpha) 1\rangle_3\langle 1 _3\hat{D}_3^\dagger(r'\alpha)$	$\hat{\rho}_4 = \frac{1}{2}\left \frac{i\alpha}{\sqrt{2}}\right\rangle_4\left\langle\frac{i\alpha}{\sqrt{2}}\right _4 + \frac{1}{2}\hat{D}_4(r'\alpha) 1\rangle_4\langle 1 _4\hat{D}_4^\dagger(r'\alpha)$
(MNF)	$\langle n \rangle_3 =  r ^2 +  t'\alpha ^2$	$\langle n \rangle_4 =  t ^2 +  r'\alpha ^2$
(MNF) 50:50	$\langle n \rangle_3 = \frac{1}{2}(1 +  \alpha ^2)$	$\langle n \rangle_4 = \frac{1}{2}(1 +  \alpha ^2)$

Tabela 4.2: Resultados obtidos: Caso 2

Obviamente, a média do número de fótons do caso 2, -Eqs. [4.26] e [4.27] - ao fazermos as mesmas considerações, também são reduzidos ao caso 1, eqs. [4.11] e [4.12]. Os resultados obtidos são importantes, pois mostram claramente o efeito da presença de um estado de um único fóton ao passar pelo BS, em comparação ao estado do vácuo,

juntamente com um estado coerente na outra entrada. Observamos então, a partir da comparação dos dois últimos casos que a adição de um único fóton em um dos modos de entrada do BS, incidido juntamente com um estado coerente no outro modo de entrada, gera estados de saída misturados e, por sua vez, emaranhados eq. [4.18]. Estes estados são reduzidos a apenas estados deslocados se substituirmos o estado correspondente a um único fóton, mantendo o estado coerente, pelo estado de vácuo no BS representado pela fig. [4.3].

Novamente, construímos uma tabela, tabela [4.2], para mostrar os principais resultados obtidos no caso 2.

**iii) Caso 3:**  $|\psi_{01}^{in}\rangle = |0\rangle_0|1\rangle_1$

Agora usaremos um exemplo que não envolve estados coerentes. Aqui, iremos manter um fóton no modo 1 e substituir o estado coerente pelo estado de vácuo no modo 0. Assim, o estado total de entrada fica dado por,

$$|\psi_{01}^{in}\rangle = |0\rangle_0|1\rangle_1 \quad (4.31)$$

que, ao passar pelo BS, assume a seguinte forma:

$$|0\rangle_0|1\rangle_1 = \hat{a}_1^\dagger|0\rangle_0|1\rangle_1 \xrightarrow{BS} (r\hat{a}_3^\dagger + t\hat{a}_4^\dagger)|0\rangle_3|0\rangle_4. \quad (4.32)$$

Da equação acima obtemos o estado de saída que é dado por,

$$|\psi_{34}^{out}\rangle = (r\hat{a}_3^\dagger + t\hat{a}_4^\dagger)|0\rangle_3|0\rangle_4. \quad (4.33)$$

Como no caso anterior, a expressão [4.32] mostra que o estado de entrada, ao passar pelo BS, é transformado em um estado emaranhado, ou seja, num estado que não pode ser escrito como um produto simples de estados de modos 3 e 4 individualmente. Além disso, este resultado mostra que ao colocar um único fóton em uma das entradas do BS, a outra entrada contendo somente o vácuo, seria refletida ou transmitida com igual probabilidade [7].

A matriz densidade para o estado de saída é dada por,

$$\rho_{34} = (r\hat{a}_3^\dagger + t\hat{a}_4^\dagger)|0\rangle_3|0\rangle_4\langle 0|_3\langle 0|_4(r^*\hat{a}_3 + t^*\hat{a}_4). \quad (4.34)$$

Como nos casos anteriores, a matriz parcial reduzida  $\rho_4$  pode ser obtida como,

$$\begin{aligned}
\hat{\rho}_4 &= \text{Tr}_3((r\hat{a}_3^\dagger + t\hat{a}_4^\dagger)|0\rangle_3|0\rangle_4\langle 0|_3\langle 0|_4)(r^*\hat{a}_3 + t^*\hat{a}_4) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \langle n|_3(r\hat{a}_3^\dagger + t\hat{a}_4^\dagger)|0\rangle_3|0\rangle_4\langle 0|_3\langle 0|_4(r^*\hat{a}_3 + t^*\hat{a}_4) \\
&= |r|^2|0\rangle_4\langle 0|_4 + |t|^2|1\rangle_4\langle 1|_4.
\end{aligned} \tag{4.35}$$

Utilizando manipulações algébricas semelhantes obtemos para a porta de saída do modo 3,

$$\hat{\rho}_3 = |t|^2|0\rangle_3\langle 0|_3 + |r|^2|1\rangle_3\langle 1|_3. \tag{4.36}$$

A média do número de fótons para o modo 4, por sua vez, pode ser calculado como,

$$\begin{aligned}
\langle n \rangle_4 &= |r|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \langle n|_4\hat{a}_4^\dagger\hat{a}_4|0\rangle\langle 0|n\rangle_4 + |t|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \langle n|_4\hat{a}_4^\dagger\hat{a}_4|1\rangle\langle 1|n\rangle_4 \\
&= 0 + |t|^2\langle 0|\hat{a}_4^\dagger\hat{a}_4|0\rangle_4 = |t|^2.
\end{aligned} \tag{4.37}$$

De forma análoga obtemos para o modo 3,

$$\langle n \rangle_3 = |r|^2 \tag{4.38}$$

e, novamente, considerando o BS 50:50 obtemos que

$$\hat{\rho}_4 = \frac{1}{2}|0\rangle_4\langle 0|_4 + \frac{1}{2}|1\rangle_4\langle 1|_4 \tag{4.39}$$

$$\rho_3 = \frac{1}{2}|0\rangle_3\langle 0|_3 + \frac{1}{2}|1\rangle_3\langle 1|_3 \tag{4.40}$$

$$\langle n \rangle_4 = \langle n \rangle_3 = \frac{1}{2}. \tag{4.41}$$

Para que possamos sentir segurança em nossos resultados analíticos, podemos novamente comparar o caso 3 com o caso 2. A densidade  $\rho_4$  do caso 2, pode ser escrita como,

$$\begin{aligned}
\hat{\rho}_4 &= |r|^2|r'\alpha\rangle_4\langle r'\alpha|_4 + |t|^2\hat{D}_4(r'\alpha) \underbrace{|0\rangle_4}_{1 \rightarrow 0} \underbrace{\langle 0|_4}_{1 \rightarrow 0} \hat{D}_4^\dagger(r'\alpha) \\
&= |r|^2 e^{(r'\alpha\hat{a}_4^\dagger - r'^*\alpha^*\hat{a}_4)}|0\rangle_4\langle 0|_4 e^{-(r'\alpha\hat{a}_4^\dagger - r'^*\alpha^*\hat{a}_4)} + |t|^2 e^{(r'\alpha\hat{a}_4^\dagger - r'^*\alpha^*\hat{a}_4)}|1\rangle_4\langle 1|_4 e^{-(r'\alpha\hat{a}_4^\dagger - r'^*\alpha^*\hat{a}_4)}.
\end{aligned}$$

Se fizermos  $\alpha = \alpha^* = 0$  obtemos que,

$$\hat{\rho}_4 = |r|^2|0\rangle_4\langle 0|_4 + |t|^2|0\rangle_4\langle 0|_4 \quad (4.42)$$

que é exatamente o resultado obtido no caso 3. Já a média  $\langle n \rangle_4$  para o caso 2, considerando ainda  $\alpha = \alpha^* = 0$  e, portanto,  $|\alpha|^2 = 0$  fica:

$$\langle n \rangle_4 = |t|^2 + |\alpha|^2|r'|^2 = |t|^2 \quad (4.43)$$

que também é igual a média do número de fótons do caso 3.

Observe que, ao fazermos  $\alpha = \alpha^* = 0$ , estamos transformando o estado  $|\alpha\rangle_0|1\rangle_1$  no estado  $|0\rangle_0|1\rangle_1$  e, por isso, os resultados obtidos a partir das comparações acima já eram esperados. Cabe, neste ponto, mencionar que o estado coerente com  $\alpha = \alpha^* = 0$  é o estado trivial, ou seja, o vácuo é um caso particular do estado coerente. Novamente, como no caso 2, a presença do estado de Fock de um único fóton em uma das entradas do BS juntamente com outro estado na outra entrada gera um estado inicial de sobreposição. O estado de sobreposição inicial ao passar pelo BS é transformado em um estado emaranhado. Observamos então que ao adicionarmos estado de Fock de um único fóton juntamente com estados de vácuo ou com estados coerentes, os estados de sobreposição inicial gerado serão transformados, ao passar pelo BS, em estados emaranhados. Se fizermos comparações semelhantes para o modo 3 obtemos resultados análogos aos obtidos acima tanto para a densidade  $\rho_3$  quanto para a média do número de fótons  $\langle n \rangle_3$ .

Fazer comparações entre cada caso é importante, uma vez que passam a funcionar como uma maneira de mostrar que os resultados analíticos obtidos em cada caso estão consistentes. Abaixo, na tabela, mostramos os principais resultados obtidos para o caso 3.

<b>Resultados obtidos: Caso 3</b>		
	MODO 3	MODO 4
(ODP)	$\hat{\rho}_3 =  t ^2 0\rangle_3\langle 0 _3 +  r ^2 1\rangle_3\langle 1 _3$	$\rho_4 =  r ^2 0\rangle_4\langle 0 _4 +  t ^2 1\rangle_4\langle 1 _4$
(ODP) 50:50	$\hat{\rho}_3 = \frac{1}{2} 0\rangle_3\langle 0 _3 + \frac{1}{2} 1\rangle_3\langle 1 _3$	$\rho_4 = \frac{1}{2} 0\rangle_4\langle 0 _4 + \frac{1}{2} 1\rangle_4\langle 1 _4$
(MNF)	$\langle n \rangle_3 =  r ^2$	$\langle n \rangle_4 =  t ^2$
(MNF) 50:50	$\langle n \rangle_3 = \frac{1}{2}$	$\langle n \rangle_4 = \frac{1}{2}$

Tabela 4.3: Resultados obtidos: Caso 3

iv) **Caso 4:**  $|\psi_{01}^{in}\rangle = A|0\rangle_0|1\rangle_1 + iB|0\rangle_0|0\rangle_1$

Para este caso iremos considerar um feixe de luz formado pela superposição de dois estados, estado de Fock de um único fóton e estado de vácuo, incidente na porta de entrada para o modo 1. Na porta de entrada para o modo 0 mantivermos o estado de vácuo. O estado total na entrada, nesse caso, pode ser escrito como,

$$|\psi_{01}^{in}\rangle = A|0\rangle_0|1\rangle_1 + iB|0\rangle_0|0\rangle_1. \quad (4.44)$$

Ao passar pelo BS iremos encontrar o seguinte resultado,

$$\begin{aligned} A|0\rangle_0|1\rangle_1 + iB|0\rangle_0|0\rangle_1 &= A\hat{a}_1^\dagger|0\rangle_0|0\rangle_1 + iB|0\rangle_0|0\rangle_1 \\ &\xrightarrow{BS} A(r\hat{a}_3^\dagger + t\hat{a}_4^\dagger)|0\rangle_3|0\rangle_4 + iB|0\rangle_3|0\rangle_4. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Logo, o estado de saída pode ser escrito como,

$$\begin{aligned} |\psi_{34}^{out}\rangle &= [A(r\hat{a}_3^\dagger + t\hat{a}_4^\dagger) + iB]|0\rangle_3|0\rangle_4 \\ &= [r|1\rangle_3|0\rangle_4 + t|0\rangle_3|1\rangle_4] + iB|0\rangle_3|0\rangle_4. \end{aligned} \quad (4.46)$$

Podemos verificar novamente que o estado de sobreposição na entrada do BS, eq. [4.44], foi transformado, ao passar pelo BS, em um estado parcialmente emaranhado, eq. [4.46].

A matriz densidade para este estado tem a seguinte forma:

$$\hat{\rho}_{34} = [A(r\hat{a}_3^\dagger + t\hat{a}_4^\dagger) + iB]|0\rangle_3|0\rangle_4\langle 0|_3\langle 0|_4 [A^*(r^*\hat{a}_3 + t^*\hat{a}_4) - iB^*]. \quad (4.47)$$

Utilizando manipulações matemáticas semelhantes aos casos anteriores, obtemos os seguintes resultados para as densidades parciais reduzidas e média do número de fótons relativos aos modos 3 e 4:

$$\hat{\rho}_4 = |A|^2(|r|^2|0\rangle_4\langle 0|_4 + |t|^2|1\rangle_4\langle 1|_4) - iAB^*t|1\rangle_4\langle 0|_4 + iBA^*t^*|0\rangle_4\langle 1|_4 + |B|^2|0\rangle_4\langle 0|_4. \quad (4.48)$$

Para  $\rho_3$  temos de modo análogo que:

$$\hat{\rho}_3 = |A|^2(|t|^2|0\rangle_3\langle 0|_3 + |r|^2|1\rangle_3\langle 1|_3) - iAB^*r|1\rangle_3\langle 0|_3 + iBA^*r^*|0\rangle_3\langle 1|_3 + |B|^2|0\rangle_3\langle 0|_3 \quad (4.49)$$

$$\langle n \rangle_4 = \frac{1}{2}|t|^2 \quad (4.50)$$

$$\langle n \rangle_3 = \frac{1}{2}|r|^2. \quad (4.51)$$

Para o BS 50:50, tomando  $A = B = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , temos que

$$\hat{\rho}_4 = \frac{3}{4}|0\rangle_4\langle 0|_4 - i\frac{1}{2\sqrt{2}}|1\rangle_4\langle 0|_4 + i\frac{1}{2\sqrt{2}}|0\rangle_4\langle 1|_4 + \frac{1}{4}|1\rangle_4\langle 1|_4 \quad (4.52)$$

$$\hat{\rho}_3 = \frac{3}{4}|0\rangle_3\langle 0|_3 + \frac{1}{2\sqrt{2}}|1\rangle_3\langle 0|_3 - \frac{1}{2\sqrt{2}}|0\rangle_3\langle 1|_3 + \frac{1}{4}|1\rangle_3\langle 1|_3 \quad (4.53)$$

$$\langle n \rangle_3 = \langle n \rangle_4 = \frac{1}{4}. \quad (4.54)$$

É interessante observar que se fizermos  $A = 1$  e  $B = 0$  nas equações [4.48] e [4.49] retornamos ao caso anterior, como já era de se esperar, pois ao fazermos essas alterações estamos reduzindo o caso 4, eq. [4.44], ao caso 3, eq. [4.31]. Como nos casos anteriores apresentamos abaixo uma tabela com os principais resultados obtidos para o caso 4.

<b>Resultados obtidos: Caso 4</b>		
	MODO 3	MODO 4
(ODP)	$\hat{\rho}_3 = \frac{3}{4} 0\rangle_3\langle 0 _3 + \frac{1}{2\sqrt{2}} 1\rangle_3\langle 0 _3 - \frac{1}{2\sqrt{2}} 0\rangle_3\langle 1 _3 + \frac{1}{4} 1\rangle_3\langle 1 _3$	$\hat{\rho}_4 = \frac{3}{4} 0\rangle_4\langle 0 _4 - i\frac{1}{2\sqrt{2}} 1\rangle_4\langle 0 _4 + i\frac{1}{2\sqrt{2}} 0\rangle_4\langle 1 _4 + \frac{1}{4} 1\rangle_4\langle 1 _4$
(ODP) 50:50	$\hat{\rho}_3 = \frac{3}{4} 0\rangle_3\langle 0 _3 + \frac{1}{2\sqrt{2}} 1\rangle_3\langle 0 _3 + \frac{1}{2\sqrt{2}} 0\rangle_3\langle 1 _3 + \frac{1}{4} 1\rangle_3\langle 1 _3$	$\hat{\rho}_4 = \frac{3}{4} 0\rangle_4\langle 0 _4 - i\frac{1}{2\sqrt{2}} 1\rangle_4\langle 0 _4 + i\frac{1}{2\sqrt{2}} 0\rangle_4\langle 1 _4 + \frac{1}{4} 1\rangle_4\langle 1 _4$
(MNF)	$\langle n \rangle_3 = \frac{1}{2} r ^2$	$\langle n \rangle_4 = \frac{1}{2} t ^2$
(MNF) 50:50	$\langle n \rangle_3 = \frac{1}{4}$	$\langle n \rangle_4 = \frac{1}{4}$

Tabela 4.4: Resultados obtidos: Caso 4

**V) Caso 5:**  $|\psi_{01}^{in}\rangle = A|\alpha\rangle_0|1\rangle_1 + iB|-\alpha\rangle_0|0\rangle_1$

Para este caso, iremos escolher como o estado de entrada

$$|\psi_{01}^{in}\rangle = A|\alpha\rangle_0|1\rangle_1 + iB|-\alpha\rangle_0|0\rangle_1 = (e^{(\alpha\hat{a}_0^\dagger - \alpha^*\hat{a}_0)}\hat{a}_1^\dagger + iBe^{-(\alpha\hat{a}_0^\dagger - \alpha^*\hat{a}_0)})|0\rangle_0|0\rangle_1 \quad (4.55)$$

que representa um estado híbrido emaranhado contendo estado de um único fóton, estado de vácuo e estados coerentes. A geração destes estados "está na moda", e diversos trabalhos de relativo impacto científico e tecnológico (como descrito na introdução) têm sido publicados muito recentemente (2014 até hoje). Devido à importância de suas aplicações em áreas como informação e computação quânticas é que decidimos fazer um estudo relativamente detalhado desses estados sob a perspectiva do MZI. Consideramos que este estado foi o resultado de uma transformação de estados de sobreposição, envolvendo estados coerentes e estados de Fock, ao passar por um BS com características diferentes dos BSs comuns que estudamos até agora [17]. Neste BS, os estados coerentes e os estados de Fock são transformados de forma a adquirir o formato da equação [4.55] que é nosso estado de sobreposição de entrada. Iremos agora verificar como este estado de entrada é transformado sobre a ação de um BS comum, semelhante aos que usamos até agora, no estado de saída. Ao passar pelo BS o estado de entrada é transformado no estado de saída  $|\psi_{34}^{out}\rangle$  como mostra a equação abaixo,

$$|\psi_{01}^{in}\rangle \xrightarrow{BS} A \exp[\alpha(t'\hat{a}_3^\dagger + r'\hat{a}_4^\dagger) + iB] - \alpha^*(t^*\hat{a}_3 + r^*\hat{a}_4)](r'\hat{a}_3^\dagger + t'\hat{a}_4^\dagger)|0\rangle_3|0\rangle_4 \\ + iB \exp[\alpha(t'\hat{a}_3^\dagger + r'\hat{a}_4^\dagger) - \alpha^*(t^*\hat{a}_3 + r^*\hat{a}_4)]|0\rangle_3|0\rangle_4 \quad (4.56)$$

que pode ser escrito como,

$$|\psi_{34}^{out}\rangle = (A\hat{D}_3(\alpha t')\hat{D}_4(\alpha r')(r\hat{a}_3^\dagger + t\hat{a}_4^\dagger) + iB\hat{D}_3^\dagger(\alpha t')\hat{D}_4^\dagger(\alpha r'))|0\rangle_3|0\rangle_4. \quad (4.57)$$

Obviamente a primeira parcela do estado acima é idêntica ao estado obtido no caso 2 como esperávamos. Como nos casos anteriores, a matriz densidade pode ser obtida como,

$$\hat{\rho}_{34} = |\psi_{34}^{out}\rangle\langle\psi_{34}^{out}| \\ = [A\hat{D}_3(\alpha t')\hat{D}_4(\alpha r')(r\hat{a}_3^\dagger + t\hat{a}_4^\dagger) + iB\hat{D}_3^\dagger(\alpha t')\hat{D}_4^\dagger(\alpha r')]\tilde{\rho}_{34}[A^*(r^*\hat{a}_3 + t^*\hat{a}_4)\hat{D}_3^\dagger(\alpha t')\hat{D}_4^\dagger(\alpha r') + \\ - iB^*\hat{D}_3(\alpha t')\hat{D}_4(\alpha r')] \quad (4.58)$$

onde definimos

$$\tilde{\rho}_{34} = |0\rangle_3|0\rangle_4\langle 0|_3\langle 0|_4. \quad (4.59)$$

A matriz densidade também pode ser escrita como segue:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{34} &= |A|^2 \hat{D}_3(\alpha t') \hat{D}_4(\alpha r') (r \hat{a}_3^\dagger + t \hat{a}_4^\dagger) \tilde{\rho}_{34} (r^* \hat{a}_3 + t^* \hat{a}_4) \hat{D}_3^\dagger(\alpha t') \hat{D}_4^\dagger(\alpha r') + \\ &- iAB^* \hat{D}_3(\alpha t') \hat{D}_4(\alpha r') (r \hat{a}_3^\dagger + t \hat{a}_4^\dagger) \tilde{\rho}_{34} \hat{D}_3(\alpha t') \hat{D}_4(\alpha r') + \\ &+ iBA^* \hat{D}_3^\dagger(\alpha t') \hat{D}_4^\dagger(\alpha r') \tilde{\rho}_{34} (r^* \hat{a}_3 + t^* \hat{a}_4) \hat{D}_3^\dagger(\alpha t') \hat{D}_4^\dagger(\alpha r') + \\ &+ |B|^2 \hat{D}_3^\dagger(\alpha t') \hat{D}_4^\dagger(\alpha r') \tilde{\rho}_{34} \hat{D}_3(\alpha t') \hat{D}_4(\alpha r'). \end{aligned} \quad (4.60)$$

Para simplificar os cálculos, iremos calcular a matriz densidade reduzida inicialmente em relação ao modo 4, resolvendo termo a termo da expressão acima. Para isso definiremos ainda  $\rho_{34}$  como a soma de quatro termos onde cada um denotará cada parcela da expressão acima, ou seja,

$$\hat{\rho}_{34} \equiv \hat{\rho}_{34}^{(1)} + \hat{\rho}_{34}^{(2)} + \hat{\rho}_{34}^{(3)} + \hat{\rho}_{34}^{(4)} \quad (4.61)$$

e, como queremos obter a densidade parcial reduzida  $\hat{\rho}_4$ , iremos dividir a soma do traço, no modo 3, em quatro parcelas, ou seja,

$$\hat{\rho}_4 = \hat{\rho}_4^{(1)} + \hat{\rho}_4^{(2)} + \hat{\rho}_4^{(3)} + \hat{\rho}_4^{(4)} = Tr_3(\hat{\rho}_{34}^{(1)}) + Tr_3(\hat{\rho}_{34}^{(2)}) + Tr_3(\hat{\rho}_{34}^{(3)}) + Tr_3(\hat{\rho}_{34}^{(4)}). \quad (4.62)$$

Agora estamos prontos para dar prosseguimento aos cálculos, calculando termo a termo.

### 4.2.1 Cálculo da Densidade Parcial para o caso 5 no BS

#### i) Primeiro Termo $\hat{\rho}_4^{(1)}$

A densidade parcial  $\rho_4^{(1)}$  é idêntica àquela que obtemos no caso 2, eq. [4.21], exceto pelo coeficiente  $|A|^2$ .

$$\hat{\rho}_4^{(1)} = Tr_3 \hat{\rho}_{34}^{(1)} = |A|^2 (|r|^2 |r' \alpha\rangle_4 \langle r' \alpha|_4 + |t|^2 \hat{D}_4(r' \alpha) |1\rangle_4 \langle 1|_4 \hat{D}_4^\dagger(r' \alpha)). \quad (4.63)$$

#### ii) Segundo Termo $\hat{\rho}_4^{(2)}$

Para o segundo termo obtemos,



$$\begin{aligned}
\hat{\rho}_4^{(2)} &= Tr_3(\rho_{34}^{(2)}) = -iAB^*\hat{D}_4(r'\alpha)Tr_3[\hat{D}_3(t'\alpha)(r\hat{a}_3^\dagger + t\hat{a}_4^\dagger)\tilde{\rho}_{34}\hat{D}_3(t'\alpha)]\hat{D}_4(r'\alpha) \\
&= -iAB^*r\hat{D}_4(r'\alpha)Tr_3(\hat{D}_3(t'\alpha)\hat{a}_3^\dagger\tilde{\rho}_{34}\hat{D}_3(t'\alpha))\hat{D}_4(r'\alpha) + \\
&\quad - iAB^*t\hat{D}_4(r'\alpha)(\hat{D}_3(t'\alpha)\hat{a}_4^\dagger\tilde{\rho}_{34}\hat{D}_3(t'\alpha))\hat{D}_4(r'\alpha). \tag{4.64}
\end{aligned}$$

O termo acima possui duas parcelas, para simplificar os cálculos iremos resolver inicialmente a primeira parcela:

$$\begin{aligned}
&- iAB^*r\hat{D}_4(r'\alpha)Tr_3(\hat{D}_3(t'\alpha)\hat{a}_3^\dagger\tilde{\rho}_{34}\hat{D}_3(t'\alpha))\hat{D}_4(r'\alpha) = \\
&= iAB^*r\hat{D}_4(r'\alpha)\sum_{n=0}^{\infty}\langle n|_3\hat{D}_3(t'\alpha)\hat{a}_3^\dagger\tilde{\rho}_{34}\hat{D}_3(t'\alpha)|n\rangle_3\hat{D}_4(r'\alpha) \\
&= -iAB^*r\hat{D}_4(r'\alpha)\sum_{n=0}^{\infty}\langle n|_3\hat{D}_3(t'\alpha)\hat{a}_3^\dagger|0\rangle_3|0\rangle_4\langle 0|_3\langle 0|_4\hat{D}_3(t'\alpha)|n\rangle_3\hat{D}_4(r'\alpha) \\
&= -iAB^*r\langle 0|_3\hat{D}_3(t'\alpha)\hat{D}_3(t'\alpha)|1\rangle_3\hat{D}_4(r'\alpha)|0\rangle_4\langle 0|_4\hat{D}_4(r'\alpha) \\
&= -iAB^*r\langle -2t'\alpha|1\rangle_3|r'\alpha\rangle\langle -r'\alpha| \\
&= 2\alpha^*iAB^*rt'e^{-2|\alpha t'|}|r'\alpha\rangle\langle -r'\alpha|. \tag{4.65}
\end{aligned}$$

Tomando agora a segunda parcela encontramos o seguinte resultado:

$$\begin{aligned}
&- iAB^*t\hat{D}_4(r'\alpha)(\hat{D}_3(t'\alpha)\hat{a}_4^\dagger\tilde{\rho}_{34}\hat{D}_3(t'\alpha))\hat{D}_4(r'\alpha) = \\
&= -iAB^*t\hat{D}_4(r'\alpha)\sum_{n=0}^{\infty}\langle n|\hat{D}_3(t'\alpha)\hat{a}_4^\dagger|0\rangle_3|0\rangle_4\langle 0|_3\langle 0|_4\hat{D}_3(t'\alpha)|n\rangle_4\hat{D}_4(r'\alpha) \\
&= -iAB^*t\langle 0|_3\hat{D}_3(t'\alpha)\hat{D}_3(t'\alpha)|0\rangle_3\hat{D}_4(r'\alpha)\hat{a}_4^\dagger|0\rangle_4\langle 0|_4\hat{D}_4(r'\alpha) \\
&= -iAB^*t\langle 0|2t'\alpha\rangle_3\hat{D}_4(r'\alpha)|1\rangle_4\langle r'\alpha|_4 \\
&= -iAB^*te^{-2|t'\alpha|^2}\hat{D}_4(r'\alpha)|1\rangle_4\langle r'\alpha|_4. \tag{4.66}
\end{aligned}$$

E assim, substituindo [4.65] e [4.66] em [4.64] obtemos,

$$\hat{\rho}_4^{(2)} = iAB^*(2\alpha^*rt'|r'\alpha\rangle\langle -r'\alpha| - t\hat{D}_4(r'\alpha)|1\rangle\langle r'\alpha|_4)e^{-2|t'\alpha|^2}. \tag{4.67}$$

### iii) Terceiro Termo $\hat{\rho}_4^{(3)}$

Agora vamos calcular o terceiro termo.

$$\begin{aligned}
\rho_4^{(3)} &= \text{Tr}_3(\rho_{34}^{(3)}) = iBA^* \hat{D}_4^\dagger(r'\alpha) \text{Tr}_3(\hat{D}_3^\dagger(t'\alpha) \tilde{\rho}_{34}(r^* \hat{a}_3 + t^* \hat{a}_4) \hat{D}_3^\dagger(t'\alpha)) \hat{D}_4^\dagger(r'\alpha) \\
&= iBA^* \hat{D}_4^\dagger(r'\alpha) r^* \text{Tr}_3(\hat{D}_3^\dagger(t'\alpha) \tilde{\rho}_{34} \hat{a}_3 \hat{D}_3^\dagger(t'\alpha)) \hat{D}_4^\dagger(r'\alpha) + \\
&+ iBA^* t^* \hat{D}_4^\dagger(r'\alpha) \text{Tr}_3(\hat{D}_3^\dagger(t'\alpha) \tilde{\rho}_{34} \hat{a}_4 \hat{D}_3^\dagger(t'\alpha)) \hat{D}_4^\dagger(r'\alpha).
\end{aligned} \tag{4.68}$$

Como antes, iremos inicialmente trabalhar com a primeira parcela da expressão acima que iremos definir como  $\rho_4^{(3)1}$ , isto é,

$$\rho_4^{(3)1} = iBA^* \hat{D}_4^\dagger(r'\alpha) r^* \text{Tr}_3(\hat{D}_3^\dagger(t'\alpha) \tilde{\rho}_{34} \hat{a}_3 \hat{D}_3^\dagger(t'\alpha)) \hat{D}_4^\dagger(r'\alpha) \tag{4.69}$$

e, nesse caso,

$$\begin{aligned}
\rho_4^{(3)1} &= iBA^* \hat{D}_4^\dagger(r'\alpha) r^* \text{Tr}_3(\hat{D}_3^\dagger(t'\alpha) |0\rangle_3 |0\rangle_4 \langle 0|_3 \langle 0|_4 a_3 \hat{D}_3^\dagger(t'\alpha)) \hat{D}_4^\dagger(r'\alpha) \\
&= iBA^* \hat{D}_4^\dagger(r'\alpha) r^* \sum_{n=0}^{\infty} \langle n | \hat{D}_3^\dagger(t'\alpha) |0\rangle_3 |0\rangle_4 \langle 0|_3 \langle 0|_4 a_3 \hat{D}_3^\dagger(t'\alpha) |n\rangle \hat{D}_4^\dagger(r'\alpha) \\
&= iBA^* r^* \langle 0|_3 a_3 \hat{D}_3^\dagger(t'\alpha) \hat{D}_3^\dagger(t'\alpha) |0\rangle_3 \hat{D}_4^\dagger(r'\alpha) |0\rangle_4 \langle 0|_4 \hat{D}_4^\dagger(r'\alpha) \\
&= iBA^* r^* \langle 1 | -2t'\alpha\rangle_3 | -r'\alpha\rangle_4 \langle r'\alpha|_4 \\
&= iBA^* r^* (-2t'\alpha) e^{-2|t'\alpha|^2} | -r'\alpha\rangle_4 \langle r'\alpha|_4.
\end{aligned} \tag{4.70}$$

A segunda parcela da expressão [4.68] iremos definir como  $\rho_4^{(3)2}$ , ou seja,

$$\rho_4^{(3)2} = iBA^* t^* \hat{D}_4^\dagger(r'\alpha) \text{Tr}_3(\hat{D}_3^\dagger(t'\alpha) \tilde{\rho}_{34} \hat{a}_4 \hat{D}_3^\dagger(t'\alpha)) \hat{D}_4^\dagger(r'\alpha) \tag{4.71}$$

e, assim, a segunda parcela pode ser simplificada como segue:

$$\begin{aligned}
\hat{\rho}_4^{(3)2} &= iBA^* t^* \hat{D}_4^\dagger(r'\alpha) \sum_{n=0}^{\infty} \langle n |_3 (\hat{D}_3^\dagger(t'\alpha) |0\rangle_3 |0\rangle_4 \langle 0|_3 \langle 0|_4 \hat{a}_4 \hat{D}_3^\dagger(t'\alpha)) |n\rangle_3 \hat{D}_4^\dagger(r'\alpha) \\
&= iBA^* t^* \langle 0|_3 \hat{D}_3^\dagger(t'\alpha) \hat{D}_3^\dagger(t'\alpha) |0\rangle_3 \hat{D}_4^\dagger(r'\alpha) |0\rangle_4 \langle 0|_4 a_4 \hat{D}_4^\dagger(r'\alpha) \\
&= iBA^* t^* e^{-2|t'\alpha|^2} | -r'\alpha\rangle_4 \langle 1|_4 \hat{D}_4^\dagger(r'\alpha).
\end{aligned} \tag{4.72}$$

Substituindo [4.70] e [4.72] em [4.68] obtemos para este termo a equação,

$$\hat{\rho}_4^{(3)} = iBA^* (-2r^* t\alpha | -\alpha r'\rangle_4 \langle \alpha r'|_4 + t^* | -\alpha r'\rangle_4 \langle 1|_4 \hat{D}_4^\dagger(r'\alpha)) e^{-2|t'\alpha|^2}. \tag{4.73}$$

iv) **Quarto Termo**  $\hat{\rho}_4^{(4)}$

Finalmente, iremos agora calcular o quarto termo. Seguindo uma álgebra semelhante às anteriores obtemos que

$$\begin{aligned}
\hat{\rho}_4^{(4)} = Tr_3(\rho_{34}) &= |B|^2 \hat{D}_4^\dagger(r' \alpha) Tr_3(\hat{D}_3^\dagger(t' \alpha) \tilde{\rho}_{34}^{(4)} \hat{D}_3(t' \alpha)) \hat{D}_4^\dagger(r' \alpha) \\
&= |B|^2 \hat{D}_4^\dagger(r' \alpha) Tr_3(\hat{D}_3(t' \alpha) \hat{D}_3^\dagger(t' \alpha) \tilde{\rho}_{34}) \hat{D}_4^\dagger(r' \alpha) \\
&= |B|^2 \hat{D}_4^\dagger(r' \alpha) Tr_3(\tilde{\rho}_{34}) \hat{D}_4^\dagger(r' \alpha) \\
&= |B|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \langle n|0\rangle_3 \langle 0|n\rangle_3 \hat{D}_4^\dagger(r' \alpha) |0\rangle_3 \langle 0|_3 \hat{D}_4^\dagger(r' \alpha) \\
&= |B|^2 |-\alpha r'\rangle_4 \langle -\alpha r'|_4
\end{aligned} \tag{4.74}$$

e, assim, somando todos os termos; eq. [4.63], eq. [4.67], eq. [4.73] e eq. [4.74] obtemos, finalmente, a matriz densidade reduzida em relação ao modo 4:

$$\begin{aligned}
\rho_4 &= |A|^2 (|r|^2 |r' \alpha\rangle_4 \langle r' \alpha|_4 + |t|^2 \hat{D}_4(r' \alpha) |1\rangle_4 \langle 1|_4 \hat{D}_4^\dagger(r' \alpha) + |B|^2 |-\alpha r'\rangle_4 \langle -\alpha r'|_4) \\
&+ iAB^* (2\alpha^* r t^* |r' \alpha\rangle_4 \langle -r' \alpha| - t \hat{D}_4(r' \alpha) |1\rangle_4 \langle r' \alpha|_4) e^{-2|t' \alpha|^2} \\
&+ iBA^* (-2r^* t \alpha |-\alpha r'\rangle_4 \langle \alpha r'|_4 + t^* |-\alpha r'\rangle_4 \langle 1|_4 \hat{D}_4^\dagger(r' \alpha)) e^{-2|t' \alpha|^2}.
\end{aligned} \tag{4.75}$$

O resultado acima é novamente um estado misturado envolvendo estados coerentes (vácuo deslocado), estado de Fock deslocado e semi-deslocado. Se considerarmos novamente um BS 50:50 e  $A = B = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , a equação acima adquire a seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\rho_4 &= \frac{1}{2} \left( \left| \frac{i\alpha}{\sqrt{2}} \right\rangle_4 \left\langle \frac{i\alpha}{\sqrt{2}} \right|_4 + \hat{D}_4(r' \alpha) |1\rangle_4 \langle 1|_4 \hat{D}_4^\dagger(r' \alpha) \right) + \frac{1}{2} \left| \frac{-i\alpha}{\sqrt{2}} \right\rangle_4 \left\langle \frac{-i\alpha}{\sqrt{2}} \right|_4 \\
&+ \frac{i}{2} \left( 2\alpha^* r t^* \left| \frac{i\alpha}{\sqrt{2}} \right\rangle_4 \left\langle \frac{-i\alpha}{\sqrt{2}} \right|_4 - t \hat{D}_4(r' \alpha) |1\rangle_4 \left\langle \frac{i\alpha}{\sqrt{2}} \right|_4 \right) e^{-|\alpha|^2} \\
&+ iBA^* \left( -2r^* t' \alpha \left| \frac{-i\alpha}{\sqrt{2}} \right\rangle_4 \left\langle \frac{i\alpha}{\sqrt{2}} \right|_4 - t^* \left| \frac{-i\alpha}{\sqrt{2}} \right\rangle_4 \langle 1|_4 \hat{D}_4^\dagger(r' \alpha) \right) e^{-|\alpha|^2}.
\end{aligned} \tag{4.76}$$

Rearranjamos a expressão acima em uma soma de quatro parcelas. É importante notar que a terceira parcela é o hermitiano conjugado da quarta. A esses dois últimos termos (terceiro e quarto), daremos especial atenção e os batizaremos de "termos de interferência"; esse contexto ficará mais claro em seções posteriores.

Utilizando os mesmos passos e cálculos análogos obtemos também para o modo 3:

$$\begin{aligned}
\rho_3 &= |A|^2(|t|^2|t'\alpha\rangle_3\langle t'\alpha|_3 + |r|^2\hat{D}_3(t'\alpha)|1\rangle_3\langle 1|_3\hat{D}_3^\dagger(t'\alpha) + |B|^2|-\alpha t'\rangle_3\langle -\alpha t'|_3 \\
&+ iAB^*(2\alpha^*r'^*t|t'\alpha\rangle_3\langle -t'\alpha|_3 - r\hat{D}_3(t'\alpha)|1\rangle_3\langle t'\alpha|_3)e^{-2|r'\alpha|^2} \\
&- iBA^*(2r't^*\alpha|-\alpha t'\rangle_3\langle \alpha t'|_3 - r^*|-\alpha t'\rangle_3\langle 1|_3\hat{D}_3^\dagger(t'\alpha))e^{-2|r'\alpha|^2}. \tag{4.77}
\end{aligned}$$

De forma igual, para o caso do BS 50:50, temos que,

$$\begin{aligned}
\rho_3 &= \frac{1}{2}\left(\left|\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right\rangle_3\left\langle\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right|_3 + \hat{D}_3(t'\alpha)|1\rangle_3\langle 1|_3\hat{D}_3^\dagger(t'\alpha)\right) + \frac{1}{2}\left|\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}\right\rangle_3\left\langle\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}\right|_3 \\
&+ \frac{i}{2}\left(\alpha\left|\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right\rangle_3\left\langle\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}\right|_3 - \frac{1}{2}\hat{D}_3(t'\alpha)|1\rangle_3\left\langle\frac{i\alpha}{\sqrt{2}}\right|_3\right)e^{-|\alpha|^2} \\
&- \frac{i}{2}\left(\alpha\left|\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}\right\rangle_3\left\langle\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right|_3 - \frac{1}{2}\left|\frac{-\alpha}{\sqrt{2}}\right\rangle_3\langle 1|_3\hat{D}_3^\dagger(t'\alpha)\right)e^{-|\alpha|^2}. \tag{4.78}
\end{aligned}$$

## 4.2.2 Cálculo da Média do Número de Fótons no BS

Agora que já temos as quatro partes da matriz densidade reduzida parcial estamos preparados para calcular a média do número de fótons para a saída do modo 4  $\langle n \rangle_4$  que, como vimos, pode ser calculado como:

$$\langle n \rangle_4 = Tr_4(\hat{a}_4^\dagger \hat{a}_4 \rho_4) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle n | \hat{a}_4^\dagger \hat{a}_4 \rho_4 | n \rangle_4. \tag{4.79}$$

Para simplificar os cálculos iremos, como fizemos anteriormente para o cálculo da densidade parcial reduzida, definir a média do número de fótons em quatro parcelas. Como queremos de início somente a média em relação ao modo 4 denotaremos que,

$$\begin{aligned}
\langle n \rangle_4 &= \langle n \rangle_4^{(1)} + \langle n \rangle_4^{(2)} + \langle n \rangle_4^{(3)} + \langle n \rangle_4^{(4)} \\
&= Tr_4(\hat{a}_4^\dagger \hat{a}_4 \rho_4^{(1)}) + Tr_4(\hat{a}_4^\dagger \hat{a}_4 \rho_4^{(2)}) + Tr_4(\hat{a}_4^\dagger \hat{a}_4 \rho_4^{(3)}) + Tr_4(\hat{a}_4^\dagger \hat{a}_4 \rho_4^{(4)}). \tag{4.80}
\end{aligned}$$

### i) Primeiro Termo $\langle n \rangle_4^{(1)}$

Assim podemos obter o primeiro termo como,

$$\langle n \rangle_4^{(1)} = Tr_4(\hat{a}_4^\dagger \hat{a}_4 \rho_4^{(1)}) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle n | \hat{a}_4^\dagger \hat{a}_4 \rho_4^{(1)} | n \rangle_4. \tag{4.81}$$

No entanto, a expressão acima é idêntica a que resolvemos no caso 2, eqs. [4.23] e [4.24]. Portanto, desenvolvendo cálculo semelhante ao que fizemos na seção (4.2) para a média do número de fótons obtemos o seguinte resultado,

$$\langle n \rangle_4^{(1)} = |A|^2 (|t|^2 + |r'\alpha|^2). \quad (4.82)$$

ii) **Segundo Termo**  $\langle \mathbf{n} \rangle_4^{(2)}$  Para o segundo termo, temos que

$$\langle n \rangle_4^{(2)} = Tr_4(\hat{a}_4^\dagger \hat{a}_4 \rho_4^{(2)}). \quad (4.83)$$

Como podemos ver a equação do segundo termo da densidade  $\hat{\rho}_4^{(2)}$  é constituída por uma soma de duas parcelas, sendo a primeira representada por um estado coerente (vácuo deslocado) e a segunda por um estado de Fock semi - deslocado. Para simplificar ainda mais nossos cálculos iremos considerar, para o cálculo da média dos fótons, inicialmente, somente os operadores da primeira parcela e em seguida o da segunda. Assim para a primeira parcela, ou seja, para o estado deslocado temos que,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} {}_4\langle n | \hat{a}_4^\dagger \hat{a}_4 | \alpha r' \rangle & {}_4\langle \alpha r' | n \rangle_4 \\ &= {}_4\langle 0 | \hat{D}_4(\alpha r') \hat{a}_4^\dagger \hat{a}_4 \hat{D}_4(\alpha r') | 0 \rangle_4 \\ &= {}_4\langle 0 | (\hat{a}_4^\dagger - \alpha^* r'^*) \hat{D}_4(\alpha r') \hat{D}_4(\alpha r') (a_4 + \alpha r') | 0 \rangle_4 \\ &= -|\alpha|^2 |r'|^2 {}_4\langle 0 | \hat{D}_4(\alpha r') \hat{D}_4(\alpha r') | 0 \rangle_4 \\ &= -|\alpha|^2 |r'|^2 e^{-2|\alpha r'|^2} \end{aligned} \quad (4.84)$$

onde foi usado, no desenvolvimento das equações acima, o lema de Baker Hausdorff, [3.50] para obter as relações  $\hat{D}_4(\alpha r') \hat{a}_4^\dagger = (\hat{a}_4^\dagger - \alpha^* r'^*) \hat{D}_4(\alpha r')$  e  $\hat{D}_4(\alpha r') \hat{a}_4 = \hat{D}_4(\alpha r') (\hat{a}_4 + \alpha r')$ . Também utilizamos a equação [3.48] que corresponde ao efeito de um estado deslocado atuando em outro. Agora iremos calcular a segunda parcela correspondente ao estado de Fock semi - deslocado, ou seja,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} {}_4\langle n | \hat{a}_4^\dagger \hat{a}_4 \hat{D}_4(\alpha r') | 1 \rangle \langle \alpha r' | n \rangle_4 & \\
&= {}_4\langle 0 | \hat{D}_4(\alpha r') \hat{a}_4^\dagger \hat{a}_4 \hat{D}_4(\alpha r') | 1 \rangle_4 \\
&= {}_4\langle 0 | (\hat{a}_4^\dagger - \alpha^* r'^*) \hat{D}_4(\alpha r') \hat{D}_4(\alpha r') (a_4 + \alpha r') | 1 \rangle_4 \\
&= -\alpha^* r'^* \langle 0 | 2\alpha r' \rangle + |\alpha|^2 |r'|^2 \langle -2\alpha r' | 0 \rangle. \quad (4.85)
\end{aligned}$$

Novamente, o desenvolvimento da equação acima exige o uso das eqs. [3.46] e [3.48].

Lembrando que, nos cálculos acima, utilizamos somente os operadores contidos na densidade do modo 4 obtido no caso 2. Agora juntando todos os outros termos e somando as duas parcelas obtemos a média do número de fótons do modo 4 para este termo como sendo

$$\begin{aligned}
\langle n \rangle_4^{(2)} &= iAB^* (-2\alpha^* r t'^* |\alpha|^2 |r'|^2 + t\alpha^* r'^* - 2\alpha^* t r'^* |\alpha|^2 |r'|^2) e^{-2|\alpha t'|^2} e^{-2|\alpha r'|^2} \\
&= iAB^* (-2\alpha^* |\alpha|^2 |r'|^2 (r t'^* + t r'^*) + t\alpha^* r'^*) e^{-2|\alpha|^2 (|r'|^2 + |t'|^2)} \\
&= iAB^* \alpha^* t r'^* e^{-2|\alpha|^2} \quad (4.86)
\end{aligned}$$

onde usamos as propriedades das relações de reciprocidade  $r t'^* + t r'^* = 0$  e  $|r|^2 + |t'|^2$ . **iii)**

### Terceiro Termo $\langle \mathbf{n} \rangle_4^{(3)}$

Vamos agora calcular a média do número de fótons para o terceiro termo.

$$\langle n \rangle_4^{(3)} = Tr_4(\hat{a}_4^\dagger \hat{a}_4 \hat{\rho}_3^{(3)}). \quad (4.87)$$

Novamente, como a densidade  $\hat{\rho}_3^{(3)}$  é constituída por duas parcelas, para simplificar os cálculos iremos desenvolver a média apenas, de início, para os operadores da primeira parcela, que é representada por um estado coerente. Em seguida continuaremos os cálculos tomando os operadores da segunda parcela, que representa um estado de Fock semi-deslocado. Nesse caso, temos que,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} {}_4\langle n | \hat{a}_4^\dagger \hat{a}_4 | -\alpha r' \rangle \langle \alpha r' | n \rangle_4 &= \\
&= {}_4\langle 0 | \hat{D}_4(-\alpha r') \hat{a}_4^\dagger \hat{a}_4 \hat{D}_4(-\alpha r') | 0 \rangle_4 \\
&= {}_4\langle 0 | (\hat{a}_4^\dagger + \alpha^* r'^*) \hat{D}_4(-\alpha r') \hat{D}_4(-\alpha r') (a_4 - \alpha r') | 0 \rangle_4 \\
&= -|\alpha|^2 |r'|^2 e^{-2|\alpha r'|^2}. \quad (4.88)
\end{aligned}$$

Tomando agora a segunda parcela obtemos o seguinte resultado:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} {}_4\langle n|\hat{a}_4^\dagger\hat{a}_4|-\alpha r'\rangle_4\langle 1|\hat{D}_4(-\alpha r')|0\rangle_4 &= \\
&= {}_4\langle 1|\hat{D}_4(-\alpha r')\hat{a}_4^\dagger\hat{a}_4\hat{D}_4(-\alpha r')|0\rangle_4 \\
&= {}_4\langle 1|(\hat{a}_4^\dagger + \alpha^* r'^*)\hat{D}_4(-\alpha r')\hat{D}_4(-\alpha r')(a_4 - \alpha r')|0\rangle_4 \\
&= -\alpha r'\langle 2\alpha r'|0\rangle - |\alpha|^2|r'|^2\langle 1| - 2\alpha r'\rangle \\
&= -\alpha r'e^{-2|\alpha r'|^2} + 2\alpha r'|\alpha|^2|r'|^2e^{-2|\alpha r'|^2}. \tag{4.89}
\end{aligned}$$

Como fizemos anteriormente, iremos acrescentar todos os outros termos obtidos na equação da densidade  $\hat{\rho}_4^{(3)}$  na somar das duas últimas parcelas que obtemos acima e rearranjar para obter a média do número de fótons para o terceiro termo:

$$\begin{aligned}
\langle n\rangle_4^{(3)} &= iBA^*(2r^*t'\alpha|\alpha|^2|r'|^2 + t^*(-\alpha r' + 2\alpha r'|\alpha|^2|r'|^2))e^{-2|\alpha r'|^2}e^{-2|\alpha t'|^2} \\
&= iBA^*(2\alpha|\alpha|^2|r'|^2(r^*t' + t^*r') - \alpha t^*r')e^{-2|\alpha|^2(|r'|^2+|t'|^2)} \\
&= -iBA^*\alpha t^*r'e^{-2|\alpha|^2}. \tag{4.90}
\end{aligned}$$

#### iv) Quarto Termo $\langle n\rangle_4^{(4)}$

A média do número de fótons para o quarto termo é mais simples pois só possui uma parcela e, portanto, iremos calcular diretamente, ou seja,

$$\begin{aligned}
\langle n\rangle_4^{(4)} &= |B|^2\sum_{n=0}^{\infty}\langle n|\hat{a}_4^\dagger\hat{a}_4|-\alpha r'\rangle_4\langle -\alpha r'|n\rangle_4 \\
&= |B|^2\langle -\alpha r'|\hat{a}_4^\dagger\hat{a}_4|-\alpha r'\rangle_4 \\
&= |B|^2|\alpha r'|^2. \tag{4.91}
\end{aligned}$$

Finalmente, podemos obter a média do número de fótons para o caso 5 simplesmente somando os resultados obtidos a partir dos quatros termos, ou seja, somando as eqs. [4.82], [4.86], [4.90] e [4.91], obtemos,

$$\begin{aligned}
\langle n\rangle_4 &= |A|^2(|t|^2 + |r'\alpha|^2) + iAB^*\alpha^*tr'^*e^{-2|\alpha|^2} - iBA^*\alpha t^*r'e^{-2|\alpha|^2} + |B|^2|\alpha r'|^2 \\
&= (|A|^2 + |B|^2)|\alpha r'|^2 + |A|^2|t|^2 + i(AB^*\alpha^*tr'^* - BA^*\alpha t^*r')e^{-2|\alpha|^2}. \tag{4.92}
\end{aligned}$$

Se fizermos  $A = B = \frac{1}{\sqrt{2}}$  na equação acima obtemos,

$$\langle n\rangle_4 = \frac{|t|^2}{2} + |r'\alpha|^2 + \frac{i}{2}(\alpha^*tr'^* - \alpha t^*r')e^{-|\alpha|^2}, \tag{4.93}$$

e, ainda, para o caso particular do BS 50:50, a média representada pela equação acima adquire a seguinte forma:

$$\langle n \rangle_4 = \frac{|\alpha|^2}{2} + \frac{1}{4}(\alpha^* - \alpha)e^{-2|\alpha|^2} + \frac{1}{4}. \quad (4.94)$$

Usando o mesmo raciocínio podemos obter com cálculos semelhantes a média do número de fótons em relação ao modo 3.

$$\langle n \rangle_3 = (|A|^2 + |B|^2)|\alpha t'|^2 + |A|^2|r|^2 + i(AB^*\alpha^*rt'^* - BA^*\alpha r^*t')e^{-2|\alpha|^2} \quad (4.95)$$

Para  $A = B = \frac{1}{\sqrt{2}}$  temos que

$$\langle n \rangle_3 = \frac{|r|^2}{2} + |t'\alpha|^2 + \frac{i}{2}(\alpha^*rt'^* - \alpha r^*t')e^{-|\alpha|^2}. \quad (4.96)$$

E também se considerarmos novamente o caso do BS 50:50 obtemos o resultado abaixo:

$$\langle n \rangle_3 = \frac{|\alpha|^2}{2} + \frac{1}{4}(\alpha^* + \alpha)e^{-2|\alpha|^2} + \frac{1}{4}. \quad (4.97)$$

Além disso, é interessante observar que a soma entre os modo 3 e o modo 4 nos leva ao seguinte resultado

$$\begin{aligned} \langle n \rangle_3 + \langle n \rangle_4 &= (|A|^2 + |B|^2)(|\alpha t'|^2 + |\alpha r'|^2) + |A|^2(|r'|^2 + |t'|^2) \\ &+ iAB^*\alpha^*(tr'^* + rt'^*) - iBA^*\alpha(t^*r' + r^*t') \end{aligned} \quad (4.98)$$

mas, sabemos que

$$tr'^* + rt'^* = t^*r' + r^*t' = 0 \quad e \quad |\alpha r'|^2 + |\alpha t'|^2 = |\alpha|^2(|r'|^2 + |t'|^2) = |\alpha|^2.$$

Portanto, a soma dos números médio assume a seguinte forma:

$$\langle n \rangle_3 + \langle n \rangle_4 = (|A|^2 + |B|^2)|\alpha|^2 + |A|^2, \quad (4.99)$$

se o estado estiver normalizado, então  $|A|^2 + |B|^2 = 1$  e, portanto



$$\langle n \rangle_3 + \langle n \rangle_4 = |\alpha|^2 + |A|^2. \quad (4.100)$$

Como os resultados obtidos para este caso geraram expressões muito grande construímos uma tabela, tab.4.5 somente contendo os principais resultados do caso 5 em relação ao modo 4.

<b>Resultados obtidos: Caso 5</b>	
MODO 4	
(ODP)	$\begin{aligned} \rho_4 = &  A ^2 ( r ^2  r'\alpha\rangle_4 \langle r'\alpha _4 +  t ^2 \hat{D}_4(r'\alpha)  1\rangle_4 \langle 1 _4 \hat{D}_4^\dagger(r'\alpha) + \\ & + iAB^* (2\alpha^* r t^*  r'\alpha\rangle_4 \langle -r'\alpha  - t \hat{D}_4(r'\alpha)  1\rangle_4 \langle r'\alpha _4) e^{-2 t'\alpha ^2} + \\ & + iBA^* (-2r^* t \alpha   -\alpha r'\rangle_4 \langle \alpha r' _4 + t^*   -\alpha r'\rangle_4 \langle 1 _4 \hat{D}_4^\dagger(r'\alpha)) e^{-2 t'\alpha ^2} + \\ & +  B ^2   -\alpha r'\rangle_4 \langle -\alpha r' _4 \end{aligned}$
(ODP) 50:50	$\begin{aligned} \rho_4 = & \frac{1}{2} \left( \left  \frac{i\alpha}{\sqrt{2}} \right\rangle_4 \left\langle \frac{i\alpha}{\sqrt{2}} \right _4 + \hat{D}_4(r'\alpha)  1\rangle_4 \langle 1 _4 \hat{D}_4^\dagger(r'\alpha) \right) + \frac{1}{2} \left  \frac{-i\alpha}{\sqrt{2}} \right\rangle_4 \left\langle \frac{-i\alpha}{\sqrt{2}} \right _4 + \\ & + \frac{i}{2} \left( 2\alpha^* r t^* \left  \frac{i\alpha}{\sqrt{2}} \right\rangle_4 \left\langle \frac{-i\alpha}{\sqrt{2}} \right _4 - t \hat{D}_4(r'\alpha)  1\rangle_4 \left\langle \frac{i\alpha}{\sqrt{2}} \right _4 + \right) e^{- \alpha ^2} \\ & + iBA^* \left( -2r^* t' \alpha \left  \frac{-i\alpha}{\sqrt{2}} \right\rangle_4 \left\langle \frac{i\alpha}{\sqrt{2}} \right _4 - t^* \left  \frac{-i\alpha}{\sqrt{2}} \right\rangle_4 \langle 1 _4 \hat{D}_4^\dagger(r'\alpha) \right) e^{- \alpha ^2}. \end{aligned}$
(MNF)	$\langle n \rangle_4 = ( A ^2 +  B ^2)  \alpha r' ^2 +  A ^2  t ^2 + i(AB^* \alpha^* t r'^* - BA^* \alpha t^* r') e^{-2 \alpha ^2}$
(MNF) 50:50	$\langle n \rangle_4 = \frac{ \alpha ^2}{2} + \frac{1}{4}(\alpha^* - \alpha) e^{-2 \alpha ^2} + \frac{1}{4}$

Tabela 4.5: Resultados obtidos: Caso 5

Para verificar se os nossos resultados estão consistentes iremos mostrar que a partir de modificações necessárias a média do número de fótons para o caso 5, eq. [4.92], pode ser reduzida à média de número de fótons de todos os casos anteriores.

Se por exemplo fizermos  $\alpha = \alpha^* = 0$  em [4.92] obtemos o seguinte resultado,

$$\langle n \rangle_4 = (|A|^2 + |B|^2) \underbrace{|0.r'|^2}_{\alpha \rightarrow 0} + |A|^2 |t|^2 + i \left( \underbrace{AB^* . 0. t r'^*}_{\alpha^* \rightarrow 0} - \underbrace{BA^* . 0. t^* r'}_{\alpha \rightarrow 0} \right) e^{-2|\alpha|^2} = |A|^2 |t|^2$$

onde o índice  $\alpha \rightarrow 0$  significa que estamos substituindo  $\alpha$  por 0 na equação, o mesmo é válido para as expressões posteriores que iremos obter. Se considerarmos  $A = 1/\sqrt{2}$  veremos que

$$\langle n \rangle_4 = \frac{1}{2} |t|^2$$

que é o mesmo resultado que obtivemos no caso 4, eq. [4.50]. Observem que esse resultado já era esperado pois ao fazer  $\alpha = \alpha^* = 0$  estamos reduzindo o estado de entrada do caso 5, [eq.4.55] no estado de entrada do caso 3 eq. [4.44]. Podemos observar que com esta modificação o estado de entrada do caso 5 perde algumas características. Este estado que antes era emaranhado e híbrido torna-se não emaranhado e perde sua característica híbrida.

Semelhantemente se quisermos obter a média do número do modo 4 obtido no caso 3 a partir do caso 5 basta fazer  $\alpha = 0$ ,  $B = 0$  e  $A = 1$  na eq. [4.92]

$$\langle n \rangle_4 = \underbrace{(1+0)}_{B \rightarrow 0 \text{ e } A \rightarrow 1} \underbrace{|0.r'|^2}_{\alpha \rightarrow 0} + |A|^2 |t|^2 + i \left( \underbrace{AB^*.0.tr'^*}_{\alpha^* \rightarrow 0} - \underbrace{BA^*.0.t^*r'}_{\alpha \rightarrow 0} \right) e^{-2|\alpha|^2} = |t|^2,$$

fazendo agora  $A = 1$  e  $B = 0$  o resultado da média do número de fótons do modo 4 obtido no caso 5 é reduzido ao caso 2:

$$\langle n \rangle_4 = \underbrace{(1+0)}_{B \rightarrow 0 \text{ e } A \rightarrow 1} \underbrace{|\alpha r'|^2}_{\alpha \rightarrow 0} + |A|^2 |t|^2 + i \left( \underbrace{AB^*.0.tr'^*}_{\alpha^* \rightarrow 0} - \underbrace{BA^*.0.t^*r'}_{\alpha \rightarrow 0} \right) e^{-2|\alpha|^2} = |r'\alpha|^2 + |t|^2.$$

De maneira semelhante se tomarmos  $A = 1$ ,  $B = 0$  e substituirmos o estado de um único fóton pelo estado de vácuo a média do número de fótons do caso 5 é reduzido a do caso 1.

Portanto, podemos olhar para o estado híbrido emaranhado como um estado mais geral com mais características em relação aos casos anteriores. A partir de modificações pertinentes tais características vão se perdendo e os resultados obtidos vão sendo reduzidos aos resultados dos casos anteriores descrito neste trabalho. Em outras palavras, podemos obter todos os resultados dos casos anteriores a partir dos resultados obtidos no caso 5.

### 4.2.3 Interferência no MZI

No interferômetro de MZI os operadores de aniquilação de bósons são transformados de forma análoga ao caso do BS, idem eq. [4.2],

$$\begin{bmatrix} \hat{a}_5 \\ \hat{a}_6 \end{bmatrix} = B_{MZI} \begin{bmatrix} \hat{a}_0 \\ \hat{a}_1 \end{bmatrix} \quad (4.101)$$

onde o termo  $B_{MZI}$  é conhecido como sendo a matriz de dispersão. A necessária e única condição para a matriz de dispersão é que ela seja unitária. Todos os cálculos desenvolvidos

para o BS são inteiramente válidos também para o interferômetro de MZI, pois a matriz obtida anteriormente, cap.3, pode ser vista como uma matriz de dispersão generalizada

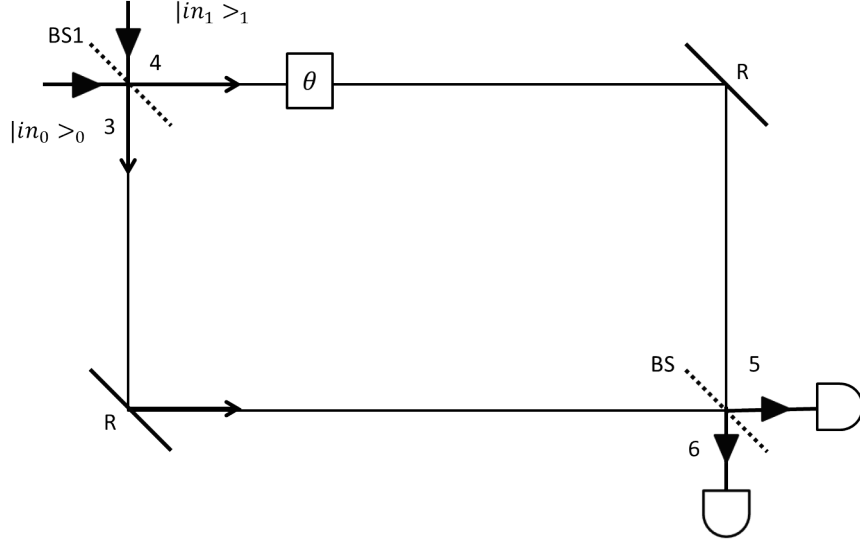


Figura 4.4: Interferômetro de Mach - Zehnder (MZI) com uma fase fixa no caminho 4 e com estados de entrada genéricos  $|in_0\rangle_0$  e  $|in_1\rangle_1$  e no BS1.

Para um interferômetro de MZI, a matriz de dispersão  $B_{MZI}$  seria representada por uma composição de várias matrizes unitária. Para o interferômetro mostrado na fig. [4.4], teremos 3 matrizes, duas correspondentes aos dois BS e a outra matriz que está associada com a fase fixa. Para o nosso caso particular, a matriz associada a fase fixa será definida como

$$U_\theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{bmatrix}. \quad (4.102)$$

Nesse caso, juntando as três matrizes correspondentes ao MZI na equação de transformação dos operadores de aniquilação dos estados de campo teremos que,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \hat{a}_5 \\ \hat{a}_6 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} t_2 & r'_2 \\ r_2 & t'_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t'_1 & r_1 \\ r'_1 & t_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a}_0 \\ \hat{a}_1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} t'_M & r_M \\ r'_M & t_M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a}_0 \\ \hat{a}_1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.103)$$

Na equação acima usamos as seguintes variáveis:

$$\begin{aligned}
r_M &= r_1 t_2 + e^{i\theta} t_1 r'_2 \\
t_M &= r_1 r_2 + e^{i\theta} t_1 t'_2 \\
r'_M &= t'_1 r_2 + e^{i\theta} r'_1 t'_2 \\
t'_M &= t'_1 t_2 + e^{i\theta} r'_1 r'_2.
\end{aligned} \tag{4.104}$$

As relações de reciprocidade que vimos para o BS são igualmente válidas para as variáveis acima, ou seja,

$$|r'_M| = |r_M|, \quad |t'_M| = |t_M|, \quad |r_M|^2 = |t_M|^2 = 1, \quad r_M^* t'_M + r'_M t_M^* = 0 \text{ e } r_M^* t_M + r'_M t_M^* = 0. \tag{4.105}$$

Agora que já sabemos como os operadores de aniquilação dos estados de campo são transformados na saída do MZI iremos analisar como os estados de entradas transformam-se nos estados de saída correspondentes sobre a ação do MZI para os 5 casos que analisamos anteriormente na saída do BS.

#### 4.2.4 Analisando Alguns casos de Interferência no MZI

##### i) Caso 1: $|\psi\rangle = |\alpha\rangle_0 |0\rangle_1$

Os estados de saída nos modos 5 e 6 do MZI podem agora ser calculados de forma análoga aos estados de saída do BS como fizemos na seção anterior, basta para isso substituir a matriz de dispersão B, equação [4.2], do BS pela matriz de dispersão  $B_{MZI}$ .

Consideramos então um feixe luminoso correspondente a um estado coerente  $|\alpha\rangle$  incidente no modo de entrada 3 do BS1 e outro feixe luminoso no modo de entrada 4 do BS1, referente a um estado de vácuo, como mostrado na fig. [4.4]

Portanto, o estado de entrada obtido para este caso é transformado como segue

$$\begin{aligned}
|\alpha\rangle_0 |0\rangle_1 &= e^{\alpha \hat{a}_0^\dagger - \alpha^* \hat{a}_0} |0\rangle_0 |0\rangle_1 \xrightarrow{MZI} \exp[\alpha(t'_M \hat{a}_5^\dagger + r'_M \hat{a}_6^\dagger) - \alpha^*(t'_M \hat{a}_5 + r'_M \hat{a}_6)] |0\rangle_5 |0\rangle_6 \\
&= \exp[\alpha t'_M \hat{a}_5^\dagger - \alpha^* t'_M \hat{a}_5] \exp[\alpha r'_M \hat{a}_6^\dagger - \alpha^* r'_M \hat{a}_6] |0\rangle_5 |0\rangle_6 \\
&= \hat{D}_5(t'_M \alpha) \hat{D}_6(r'_M \alpha) |0\rangle_5 |0\rangle_6.
\end{aligned} \tag{4.106}$$

Sendo assim o estado de saída fica dado por,

$$|\psi_{56}^{out}\rangle = \hat{D}_5(t'_M \alpha) \hat{D}_6(r'_M \alpha) |0\rangle_5 |0\rangle_6. \tag{4.107}$$

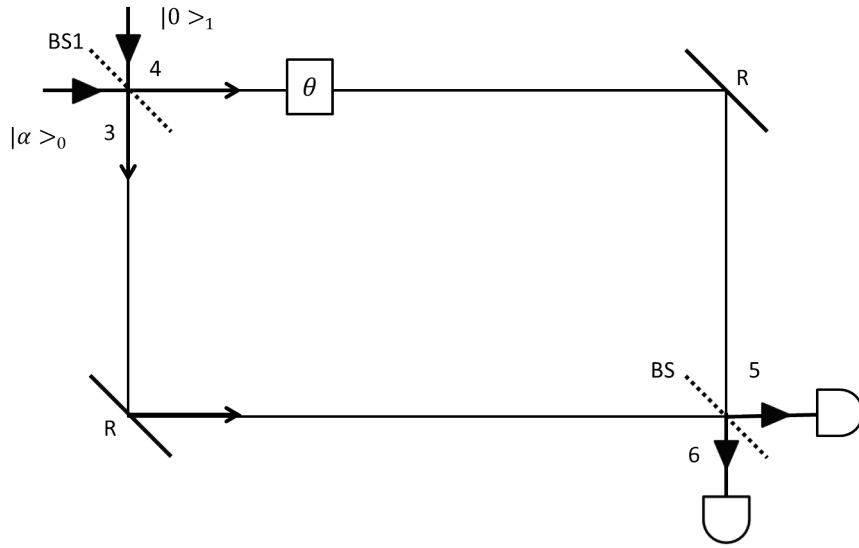


Figura 4.5: Interferômetro de Mach - Zehnder (MZI) com uma fase fixa no modo 4. Os estados de entrada no BS1 são um estado de vácuo  $|0\rangle_1$  e estado coerente  $|\alpha\rangle_0$ .

Utilizando uma álgebra semelhante a que desenvolvemos na seção anterior obtemos as densidades parciais reduzida para os dois modos 5 e 6 como sendo,

$$\rho_6 = |r'_M \alpha\rangle_6 \langle r'_M \alpha|_6 \quad e \quad \rho_5 = |t'_M \alpha\rangle_5 \langle t'_M \alpha|_5. \quad (4.108)$$

Como antes os estados obtidos são estados coerentes (vácuo deslocado). Semelhantemente, a média do número de fótons assume a seguinte forma:

$$\langle n \rangle_6 = |r'_M \alpha|^2 \quad e \quad \langle n \rangle_5 = |t'_M \alpha|^2, \quad (4.109)$$

usando as relações da equação [4.105], podemos verificar que,

$$|r'_M|^2 = \cos^2(\theta/2) \quad e \quad |t'_M|^2 = \sin^2(\theta/2) \quad (4.110)$$

Portanto, as médias acima podem ser escritas como,

$$\langle n \rangle_6 = |\alpha|^2 \cos^2(\theta/2) \quad e \quad \langle n \rangle_5 = |\alpha|^2 \sin^2(\theta/2). \quad (4.111)$$

É interessante notar que, somando as duas médias, obtemos o seguinte resultado:

$$\begin{aligned}
\langle n \rangle_5 + \langle n \rangle_6 &= |\alpha|^2 \cos^2(\theta/2) + |\alpha|^2 \sin^2(\theta/2) \\
&= |\alpha|^2 (\cos^2(\theta/2) + \sin^2(\theta/2)) = |\alpha|^2.
\end{aligned} \tag{4.112}$$

Este resultado é, como discutido antes, esperado, pois a transformação total do MZI é unitária, preservando o número médio (total) de fótons na saída do MZI.

**ii) Caso 2:**  $|\psi\rangle = |\alpha\rangle_0|1\rangle_1$

Para o caso 2, manteremos o estado coerente  $|\alpha\rangle_0$  na porta de entrada 3 do BS1 e substituiremos, seguindo o mesmo raciocínio de antes, o estado de vácuo  $|0\rangle_1$  por um estado de Fock de um único fóton  $|1\rangle_1$ . O estado total na entrada  $|\psi\rangle = |\alpha\rangle_0|1\rangle_1$  é transformado sob a ação do MZI no seguinte estado de saída,

$$\begin{aligned}
|\alpha\rangle_0|1\rangle_1 &= e^{\alpha\hat{a}_0^\dagger - \alpha^*\hat{a}_0} \hat{a}_1^\dagger |0\rangle_0|0\rangle_1 \xrightarrow{MZI} \exp[\alpha(t'_M\hat{a}_5^\dagger + r'_M\hat{a}_6^\dagger) - \alpha^*(t'_M{}^*\hat{a}_5 + r'_M{}^*\hat{a}_6)] (r_M\hat{a}_5^\dagger + t_M\hat{a}_6^\dagger) |0\rangle_5|0\rangle_6 \\
&= \exp[\alpha t'_M\hat{a}_5^\dagger - \alpha^* t'_M{}^*\hat{a}_5] \exp[\alpha r'_M\hat{a}_6^\dagger - \alpha^* r'_M{}^*\hat{a}_6] (r_M\hat{a}_5^\dagger + t_M\hat{a}_6^\dagger) |0\rangle_5|0\rangle_6 \\
&= \hat{D}_5(t'_M\alpha) \hat{D}_6(r'_M\alpha) (r_M\hat{a}_5^\dagger + t_M\hat{a}_6^\dagger) |0\rangle_5|0\rangle_6.
\end{aligned} \tag{4.113}$$

Rearranjando os termos acima obtemos o estado de saída para esse caso como sendo,

$$|\psi_{56}^{out}\rangle = \hat{D}_5(t'_M\alpha) \hat{D}_6(r'_M\alpha) (r_M\hat{a}_5^\dagger + t_M\hat{a}_6^\dagger) |0\rangle_5|0\rangle_6. \tag{4.114}$$

Portanto, fazendo a comparação direta com o caso 2 do BS, obtemos as matrizes densidades parciais reduzidas para modos 5 e 6 como escrito abaixo,

$$\rho_6 = |r_M|^2 |r'_M\alpha\rangle_6 \langle r'_M\alpha|_6 + |t_M|^2 \hat{D}_6(r'_M\alpha) |1\rangle_6 \langle 1|_6 \hat{D}_6^\dagger(r'_M\alpha). \tag{4.115}$$

$$\rho_5 = |t_M|^2 |t'_M\alpha\rangle_5 \langle t'_M\alpha|_5 + |r_M|^2 \hat{D}_5(t'_M\alpha) |1\rangle_5 \langle 1|_5 \hat{D}_5^\dagger(t'_M\alpha). \tag{4.116}$$

Novamente, os resultados obtidos acima é um estado misturado entre um estado coerente (vácuo deslocado) e um estado deslocado de Fock. De forma análoga, por comparação com o caso 2 do BS, encontramos a média do número de fótons para os dois modos como sendo,

$$\langle n \rangle_6 = |t_M|^2 + |r'_M \alpha|^2 \quad e \quad \langle n \rangle_5 = |r_M|^2 + |t'_M \alpha|^2 \quad (4.117)$$

que também podem ser escritas como:

$$\langle n \rangle_6 = \sin^2(\theta/2) + |\alpha|^2 \cos^2(\theta/2) \quad e \quad \langle n \rangle_5 = \cos^2(\theta/2) + |\alpha|^2 \sin^2(\theta/2). \quad (4.118)$$

A soma das médias acima conduz ao seguinte resultado:

$$\langle n \rangle_6 + \langle n \rangle_5 = 1 + |\alpha|^2. \quad (4.119)$$

**iii) Caso 3:**  $|\psi\rangle = |0\rangle_0|1\rangle_1$

Consideramos agora um estado de vácuo no 3 e um estado de um único fóton incidente no modo 4 do BS1. O estado de sobreposição na entrada matematicamente é dado por  $|\psi\rangle = |0\rangle_0|1\rangle_1$ . Para este caso, este estado sofrerá a seguinte transformação sob a ação do MZI,

$$|0\rangle_0|1\rangle_1 = \hat{a}_1^\dagger |0\rangle_0|1\rangle_1 \xrightarrow{MZI} (r_M \hat{a}_5^\dagger + t_M \hat{a}_6^\dagger) |0\rangle_5 |0\rangle_6 \quad (4.120)$$

Substituindo os valores de  $r_M$  e  $t_M$  dado pelas equações [4.104], em [4.120] e rearranjando obtemos o seguinte resultado para o estado de saída,

$$|\psi_{56}^{out}\rangle = \frac{1}{2} [(e^{i\theta} - 1) |1\rangle_5 |0\rangle_6 + (e^{i\theta} + 1) |0\rangle_5 |1\rangle_6] \quad (4.121)$$

Podemos ver que a equação acima é um estado emaranhado, como no caso anterior do BS. As densidades parciais podem ser facilmente calculadas por comparação ao caso 3. Tal comparação conduz aos seguintes resultados,

$$\rho_6 = |r_M|^2 |0\rangle_6 \langle 0|_6 + |t_M|^2 |1\rangle_6 \langle 1|_6 \quad (4.122)$$

$$\rho_5 = |t_M|^2 |0\rangle_5 \langle 0|_5 + |r_M|^2 |1\rangle_5 \langle 1|_5 \quad (4.123)$$

que também podem ser escritos como,

$$\langle n \rangle_6 = \sin^2(\theta/2) \quad e \quad \langle n \rangle_5 = \cos^2(\theta/2). \quad (4.124)$$

A soma entre as médias leva ao seguinte resultado,

$$\langle n \rangle_6 + \langle n \rangle_5 = \sin^2(\theta/2) + \cos^2(\theta/2) = 1. \quad (4.125)$$

**iv) Caso 4:**  $|\psi_{10}^{in}\rangle = A|0\rangle_0|1\rangle_1 + iB|0\rangle_0|0\rangle_1$

Neste caso, manteremos como estado de entrada no modo 3 o vácuo e substituímos o estado de um único fóton pelo estado  $A|0\rangle_0|1\rangle_1 + iB|0\rangle_0|0\rangle_1$  no BS1.

O estado total na entrada pode ser escrito como  $|\psi_{10}^{in}\rangle = A|0\rangle_0|1\rangle_1 + iB|0\rangle_0|0\rangle_1$ . Ao passar pelo MZI, o estado de entrada é transformado no estado de saída da seguinte forma,

$$A|0\rangle_0|1\rangle_1 + iB|0\rangle_0|0\rangle_1 \xrightarrow{MZI} (A(r_M\hat{a}_5^\dagger + t_M\hat{a}_6^\dagger) + iB)|0\rangle_5|0\rangle_6, \quad (4.126)$$

e, assim, o estado de saída pode ser escrito como,

$$|\psi_{56}^{out}\rangle = (A(r_M\hat{a}_5^\dagger + t_M\hat{a}_6^\dagger) + iB)|0\rangle_5|0\rangle_6. \quad (4.127)$$

O estado acima é também, como no caso do BS, um estado emaranhado. Para as matrizes densidade parciais temos,

$$\rho_6 = |A|^2(|r_M|^2|0\rangle_6\langle 0|_6 + |t_M|^2|1\rangle_6\langle 1|_6) - iAB^*t_M|1\rangle_6\langle 0|_6 + iBA^*t_M^*|0\rangle_6\langle 1|_6 + |B|^2|0\rangle_6\langle 0|_6 \quad (4.128)$$

$$\rho_5 = |A|^2(|t_M|^2|0\rangle_5\langle 0|_5 + |r_M|^2|1\rangle_5\langle 1|_5) - iAB^*r_M|1\rangle_5\langle 0|_5 + iBA^*r_M^*|0\rangle_5\langle 1|_5 + |B|^2|0\rangle_5\langle 0|_5. \quad (4.129)$$

E as médias dos números de fótons são dadas por,



$$\langle n \rangle_5 = \frac{1}{2}|r_M|^2 \quad e \quad \langle n \rangle_6 = \frac{1}{2}|t_M|^2 \quad (4.130)$$

que também podem ser escritas como,

$$\langle n \rangle_5 = \frac{1}{2} \cos^2(\theta/2) \quad e \quad \langle n \rangle_6 = \frac{1}{2} \sin^2(\theta/2). \quad (4.131)$$

A soma das médias acima leva ao seguinte resultado,

$$\langle n \rangle_5 + \langle n \rangle_6 = \frac{1}{2} (\sin^2(\theta/2) + \cos^2(\theta/2)) = \frac{1}{2} \quad (4.132)$$

**v) Caso v:**  $|\psi_{10}^{in}\rangle = A|\alpha\rangle_0|1\rangle_1 + iB|-\alpha\rangle_0|0\rangle_1$

Finalmente, nosso caso de maior interesse será investigar o estado de entrada do MZI como sendo dado por  $|\psi_{10}^{in}\rangle = A|\alpha\rangle_0|1\rangle_1 + iB|-\alpha\rangle_0|0\rangle_1$ . Neste caso a transformação sob a ação do MZI deste estado leva ao seguinte resultado:

$$\begin{aligned} |\psi_{34}^{out}\rangle \xrightarrow{MZI} & A \exp[\alpha(t'_M \hat{a}_5^\dagger + r'_M \hat{a}_6^\dagger) + iB] - \alpha^*(t_M^* \hat{a}_5 + r_M^* \hat{a}_6)] (r'_M \hat{a}_5^\dagger + t'_M \hat{a}_6^\dagger) |0\rangle_5 |0\rangle_6 \\ & + iB \exp[\alpha(t'_M \hat{a}_5^\dagger + r'_M \hat{a}_6^\dagger) - \alpha^*(t_M^* \hat{a}_5 + r_M^* \hat{a}_6)] |0\rangle_5 |0\rangle_6. \end{aligned} \quad (4.133)$$

## 4.2.5 Cálculo da Densidade Parcial para o Caso 5 no MZI

Na seção anterior dividimos a densidade parcial reduzida em quatro partes para facilitar os cálculos e obtivemos os resultados de cada parte individualmente. Para este caso 5, utilizando a álgebra que estamos desenvolvendo e o mesmo raciocínio que utilizamos nas seções anteriores, fazendo a comparação imediata obtemos resultados idênticos, dados por,

$$\begin{aligned} \rho_6 &= |A|^2 (|r_M|^2 |r'_M \alpha\rangle_6 \langle r'_M \alpha|_6 + |t_M|^2 \hat{D}_6(r'_M \alpha) |1\rangle_6 \langle 1|_6 \hat{D}_6^\dagger(r'_M \alpha) + |B|^2 |-\alpha r'_M\rangle_6 \langle -\alpha r'_M|_6) \\ &+ iAB^* (2\alpha^* r_M t_M^* |r'_M \alpha\rangle_6 \langle -r'_M \alpha|_6 - t_M \hat{D}_6(r'_M \alpha) |1\rangle_6 \langle r'_M \alpha|_6) e^{-2|t'_M \alpha|^2} \\ &+ iBA^* (-2r_M^* t'_M \alpha |-\alpha r'_M\rangle_6 \langle \alpha r'_M|_6 + t_M^* |-\alpha r'_M\rangle_6 \langle 1|_6 \hat{D}_6^\dagger(r'_M \alpha)) e^{-2|t'_M \alpha|^2} \end{aligned} \quad (4.134)$$

e, para o modo 5 temos que,

$$\begin{aligned}
\rho_5 &= |A|^2(|t_M|^2|t'_M\alpha\rangle_5\langle t'_M\alpha|_5 + |r_M|^2\hat{D}_5(t'_M\alpha)|1\rangle_5\langle 1|_5\hat{D}_5^\dagger(t'_M\alpha) + |B|^2|-\alpha t'_M\rangle_5\langle -\alpha t'_M|_5 \\
&+ iAB^*(2\alpha^*r'_Mt_M|t'_M\alpha\rangle_5\langle -t'_M\alpha|_5 - r_M\hat{D}_5(t'_M\alpha)|1\rangle_5\langle t'_M\alpha|_5)e^{-2|r'_M\alpha|^2} \\
&+ iBA^*(2r'_Mt_M^*\alpha|-\alpha t'_M\rangle_5\langle \alpha t'_M|_5 - r_M^*|-\alpha t'_M\rangle_5\langle 1|_5\hat{D}_5^\dagger(t'_M\alpha))e^{-2|r'_M\alpha|^2}. \quad (4.135)
\end{aligned}$$

## 4.2.6 Cálculo da Média do Número de Fótons para o Caso 5 no MZI

A média do número de fótons também é calculada seguindo o mesmo raciocínio. Desta forma, temos para a média do número de fótons dos dois modos 5 e 6,

$$\langle n \rangle_6 = (|A|^2 + |B|^2)|\alpha r'_M|^2 + |A|^2|t_M|^2 + i(AB^*\alpha^*tr'_M - BA^*\alpha t'_M r'_M)e^{-2|\alpha|^2} \quad (4.136)$$

e, para  $A = B = 1/\sqrt{2}$  temos,

$$\langle n \rangle_6 = \frac{|t_M|^2}{2} + |r'_M\alpha|^2 + \frac{i}{2}(\alpha^*t_M r'_M - \alpha t'_M r'_M)e^{-2|\alpha|^2} \quad (4.137)$$

que também podem ser escrita como,

$$\langle n \rangle_6 = \frac{1}{2}\sin^2(\theta/2) + |\alpha|^2\cos^2(\theta/2) + \frac{i}{4}(\alpha^* - \alpha)\sin(\theta)e^{-2|\alpha|^2}. \quad (4.138)$$

E, para o modo 5 temos

$$\langle n \rangle_5 = (|A|^2 + |B|^2)|\alpha t'_M|^2 + |A|^2|r_M|^2 + i(AB^*\alpha^*r_M t'_M - BA^*\alpha r_M^* t'_M)e^{-2|\alpha|^2} \quad (4.139)$$

Semelhantemente, para  $A = B = 1/\sqrt{2}$  temos,

$$\langle n \rangle_5 = \frac{|r_M|^2}{2} + |t'_M\alpha|^2 + \frac{i}{2}(\alpha^*r_M t'_M - \alpha r_M^* t'_M)e^{-2|\alpha|^2} \quad (4.140)$$

que também pode ser escrita levando em consideração as relações de reciprocidade com

$$\langle n \rangle_5 = \frac{1}{2} \cos^2(\theta/2) + |\alpha|^2 \sin^2(\theta/2) + \frac{i}{4} (\alpha^* - \alpha) \sin(\theta) e^{-2|\alpha|^2}, \quad (4.141)$$

e também, se somarmos a média do número de fótons, equações [4.137] e [4.140], considerando  $|A|^2 + |B|^2 = 1$  e a relação de reciprocidade  $r_M^* t_M + r_M' t_M^* = 0$ , obtemos um resultado idêntico ao que encontramos no caso 5 do BS,

$$\langle n \rangle_6 + \langle n \rangle_5 = |\alpha|^2 + |A|^2. \quad (4.142)$$

Notem que, neste caso, se  $A=0$ , a soma do número médio de fótons se reduz ao caso simples, dado por  $|\alpha|^2$ .

# Capítulo 5

## Análise Gráfica dos Resultados

Na seção anterior, caso 5 do MZI, obtivemos um estado misturado na saída do interferômetro, que nos levou a calcular a densidade envolvendo estados coerentes, estados de Fock deslocado e semi - deslocados. Além disso, calculamos também a média do número de fótons de cada saída do MZI. Nesta seção, iremos discutir os resultados gráficos correspondentes às médias do número de fótons nas saídas 5 e 6 do MZI.

### 5.1 Comparação entre os casos 2 e 5 para o MZI: Análise do número médio de fótons

Para iniciarmos, vamos discutir o caso 2 [8], onde, na ocasião, investigaram a interferência entre o estado de Fock  $|1\rangle$  e um estado coerente  $|\alpha\rangle$ .

Logo abaixo, estão ilustrados os resultados gráficos da média do número de fótons, em relação aos modos de saída 6 e 5, para o caso 2, figuras [5.1] e [5.2], respectivamente). Resolvemos reproduzi-lo aqui para facilitar a comparação.

A [fig.5.1] mostra o resultado do número médio de fótons  $\langle n \rangle_6$  (caso 2, equação [4.118]) em função do deslocamento de fase  $\theta$  para três valores distintos do estado  $|\alpha\rangle$ . Nela, podemos observar que, para  $|\alpha|^2 = 1$ , a média do número de fótons é independente de  $\theta$  e igual a 1.

O número médio de fótons no modo 5 mostrado na figura fig. [5.2] é análogo, como era de se esperar. Novamente, para o caso  $|\alpha|^2 = 1$ , a média é independente do deslocamento de fase  $\theta$ . Estes resultados são, em essência, análogos ao caso de termos um único fóton em cada entrada na porta do MZI, resultando numa média igual a 1 para ambas as portas

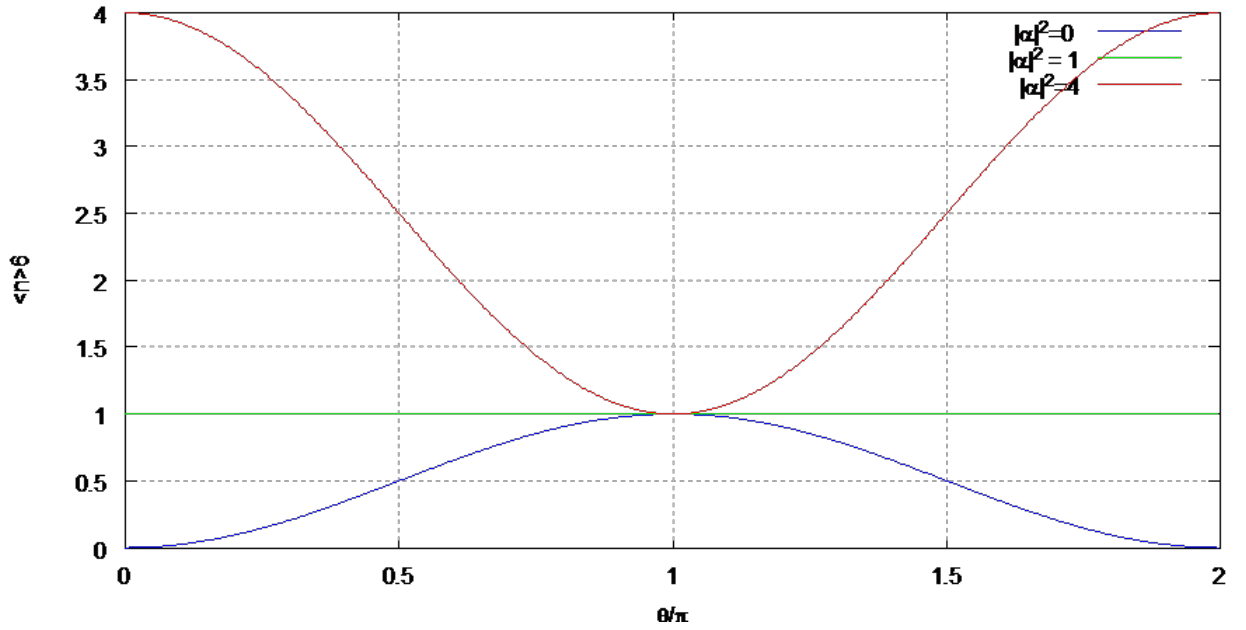


Figura 5.1: Média do número de fótons em relação à saída 6 do MZI para o Caso 2 para valores de  $|\alpha|^2 = 0$ ,  $|\alpha|^2 = 1$  e  $|\alpha|^2 = 4$ .

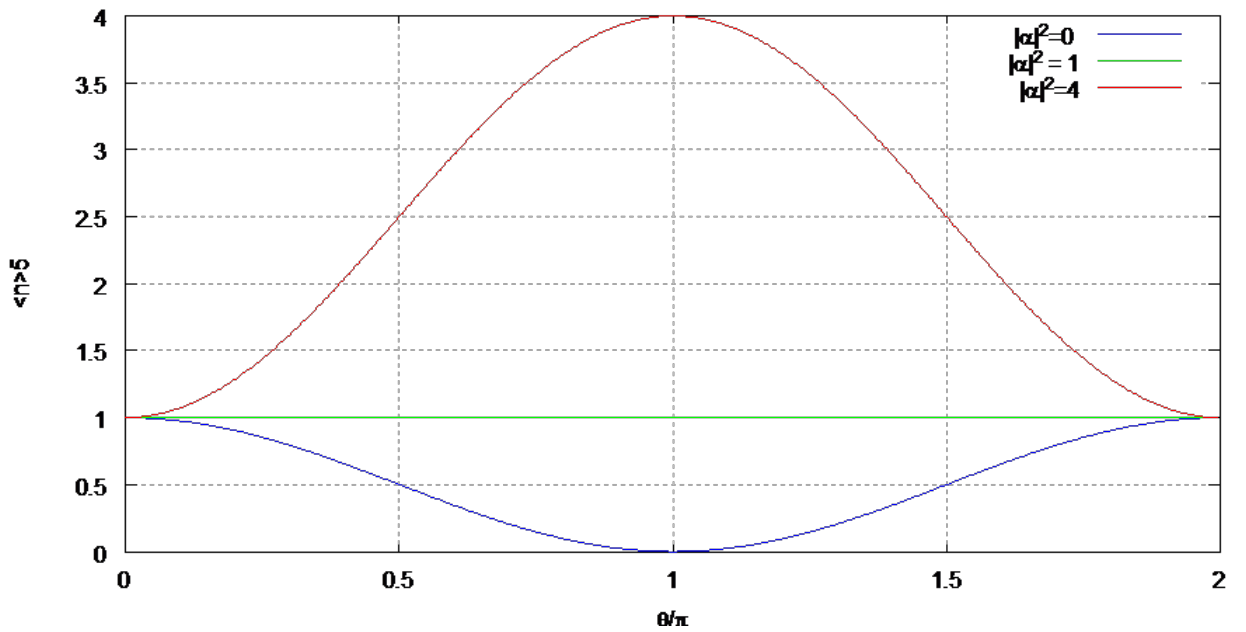


Figura 5.2: Média do número de fótons em relação à saída 5 do MZI para o Caso 2 para valores de  $|\alpha|^2 = 0$ ,  $|\alpha|^2 = 1$  e  $|\alpha|^2 = 4$ .

de saída, também independente de  $\theta$ . No entanto, vale ressaltar que, embora os estados de saída para cada caso sejam emaranhados e completamente diferentes (veja as eqs. 35 e 23 da ref.: *Quantum Interference Between a Single – Photon Fock*), quando executamos o traço parcial, o emaranhamento é eliminado, resultando em médias idênticas (no número de fótons) para cada porta de saída. Além disto, os máximos e os mínimos indicam o caso em que os estados quânticos nos modos de saída distintos são ou estados puros coerentes, ou estados puros de Fock.

De posse desta pequena revisão do trabalho citado acima, vamos discutir nossos primeiros resultados logo abaixo.

A fig. [5.3] mostra o resultado do número médio de fótons (caso 5, equação [4.138]) em função do deslocamento de fase  $\theta$  para três valores distintos do estado  $|\alpha\rangle$ . Para todos os valores estudados, a contribuição do último termo nas equações [4.138] e [4.141] é relativamente pequena (para  $\alpha = 0$ , o último termo é identicamente nulo e, portanto, não contribui), no entanto, sua contribuição é evidente na curva para  $|\alpha|^2 = 1$ . É importante mencionar que o termo  $e^{-2|\alpha|^2}$ , provem de uma contribuição corresponde à parcela  $|-\alpha\rangle|0\rangle$  do estado híbrido, mostrando seu caráter não trivial, em relação à média de fótons, neste caso.

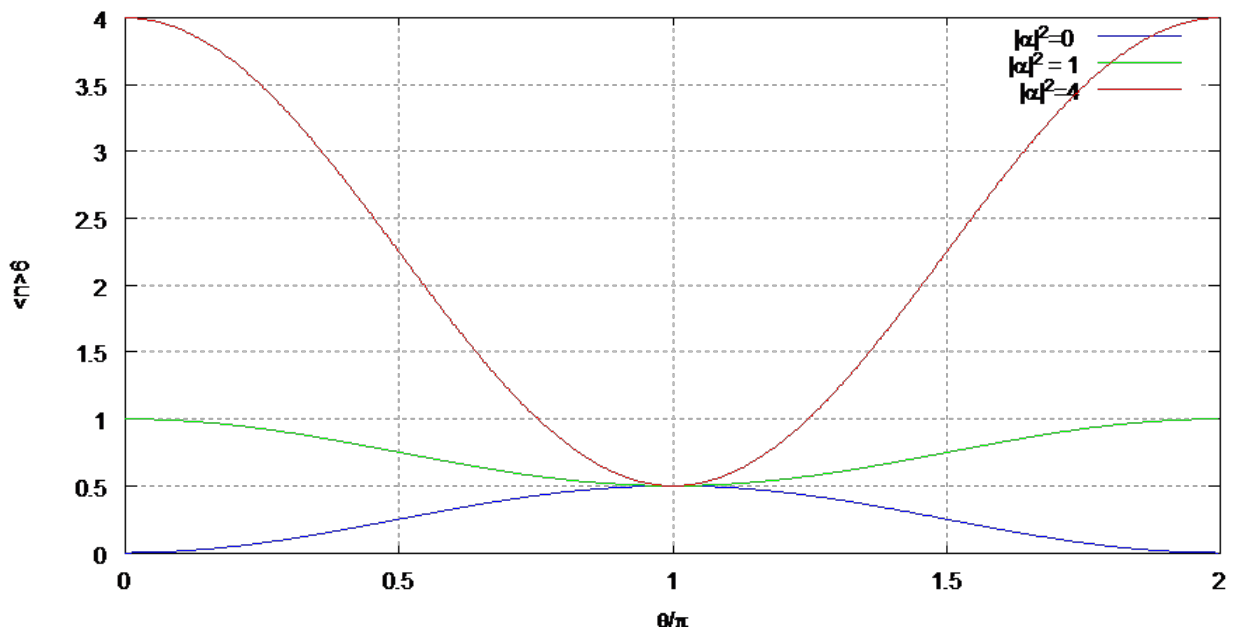


Figura 5.3: Nosso resultado: Média do número de fótons em relação à saída 6 do MZI para o Caso 5 para valores de  $|\alpha|^2 = 0$ ,  $|\alpha|^2 = 1$  e  $|\alpha|^2 = 4$ .

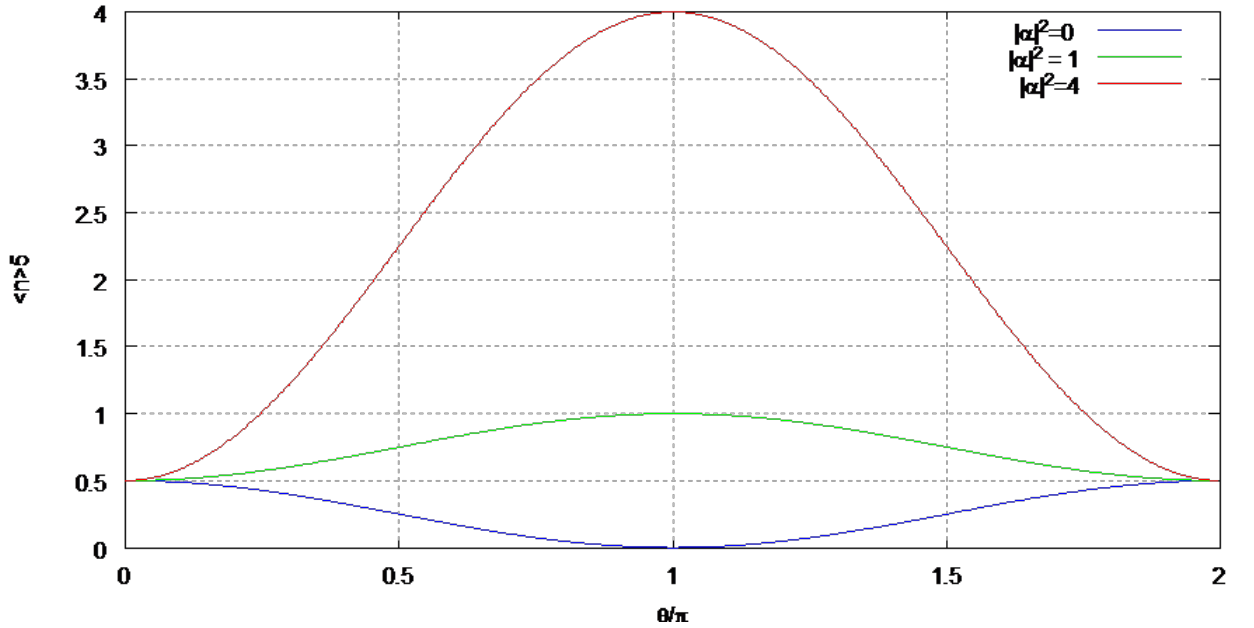


Figura 5.4: Nosso resultado: Média do número de fótons em relação à saída 5 do MZI para o Caso 5 para valores de  $|\alpha|^2 = 0$ ,  $|\alpha|^2 = 1$  e  $|\alpha|^2 = 4$ .

Embora os resultados acima façam parte de estudos atuais e estão em fase de entendimento, é interessante notar dois limites correspondentes ao intervalo de valores de  $\alpha$ . Para  $\alpha$  razoavelmente grande, o "termo de interferência" se torna desprezível e a média de fótons se aproxima fortemente do resultado já conhecido. Por outro lado, se  $|\alpha| = 0$ , o termo de interferência se anula e, além disto, temos um estado quase-separável. Portanto, a média do número de fotos em cada modo escala com seno e/ou cosseno.

Uma vez que acreditamos que o "termo de interferência" poderia revelar novos aspectos na média do número de fótons para cada modo, iremos investigar situações em que tal termo esteja presente mais fortemente. Os resultados serão discutidos logo a seguir.

### 5.1.1 Discussão da Média do Número de Fótons: Caso 5

Nesta seção, discutiremos os principais aspectos relacionados às médias do número de fótons correspondentes aos cálculos para o estado emaranhado híbrido (caso 5), nas saídas do MZI. Para fins de simplificação e comparação com a literatura escolheremos, como antes, o caso específico e particular de um BS 50:50. Além disto, vamos simplificar as equações [4.138] e [4.141], e reproduzi-las logo abaixo (utilizamos a notação complexa  $\alpha = \alpha' + i\alpha''$ , onde  $\alpha'$  é a parte real,  $Re(\alpha)$ , e  $\alpha''$  a parte imaginária,  $Im(\alpha)$ , de  $\alpha$ ). O

resultado é

$$\langle n \rangle_6 = \frac{1}{2} \sin^2(\theta/2) + |\alpha|^2 \cos^2(\theta/2) + \frac{\alpha''}{2} \sin(\theta) e^{-2|\alpha|^2} \quad (5.1)$$

e,

$$\langle n \rangle_5 = \frac{1}{2} \cos^2(\theta/2) + |\alpha|^2 \sin^2(\theta/2) - \frac{\alpha''}{4} \sin(\theta) e^{-2|\alpha|^2}. \quad (5.2)$$

Agora, para facilitar a comparação e discussão, vamos mostrar, na sequência, seis figuras, que correspondem a três valores distintos de  $|\alpha|^2$  : 0,1; 0,5 e 1. Para cada valor de  $\alpha$  explicitaremos, mais uma vez, a média em cada um dos modos de saída do MZI. Começaremos com o menor valor de alpha, variando, dentro de cada figura, apenas a contribuição relacionada com a parte real e imaginária dele. Logo abaixo encontramos os resultados que mostram o comportamento da média para o modo 6 e 5 (respectivamente) e com  $|\alpha|^2 = 1$ .

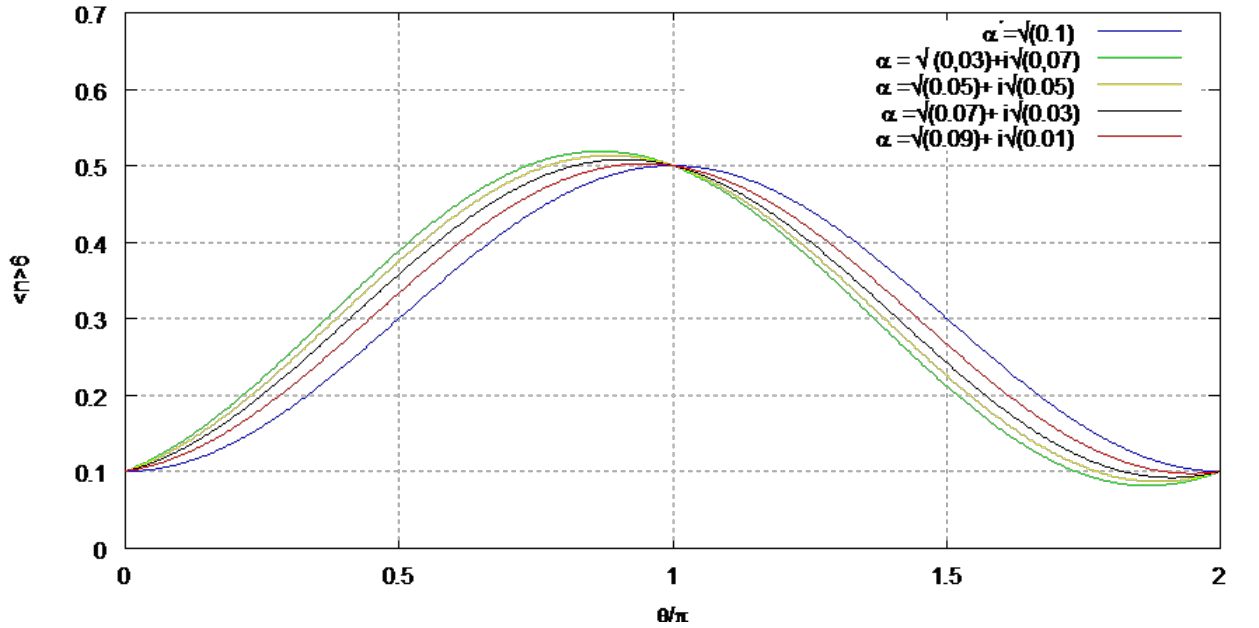


Figura 5.5: Gráfico da média de número de fóton na saída 6 do MZI para o estado  $|\psi_{01}^{in} = A|\alpha\rangle_0|1\rangle_1 + iB|-\alpha\rangle_0|0\rangle_1$  para diferentes valores de  $\alpha$  mantendo o valor de  $|\alpha|^2$  fixo e igual a 0,1.

Como podemos observar nas figs. [5.5] e [5.6] a curva azul, corresponde ao caso particular no qual o termo de interferência se anula completamente. Para esse caso, as equações [5.1] e [5.2] se reduzem a



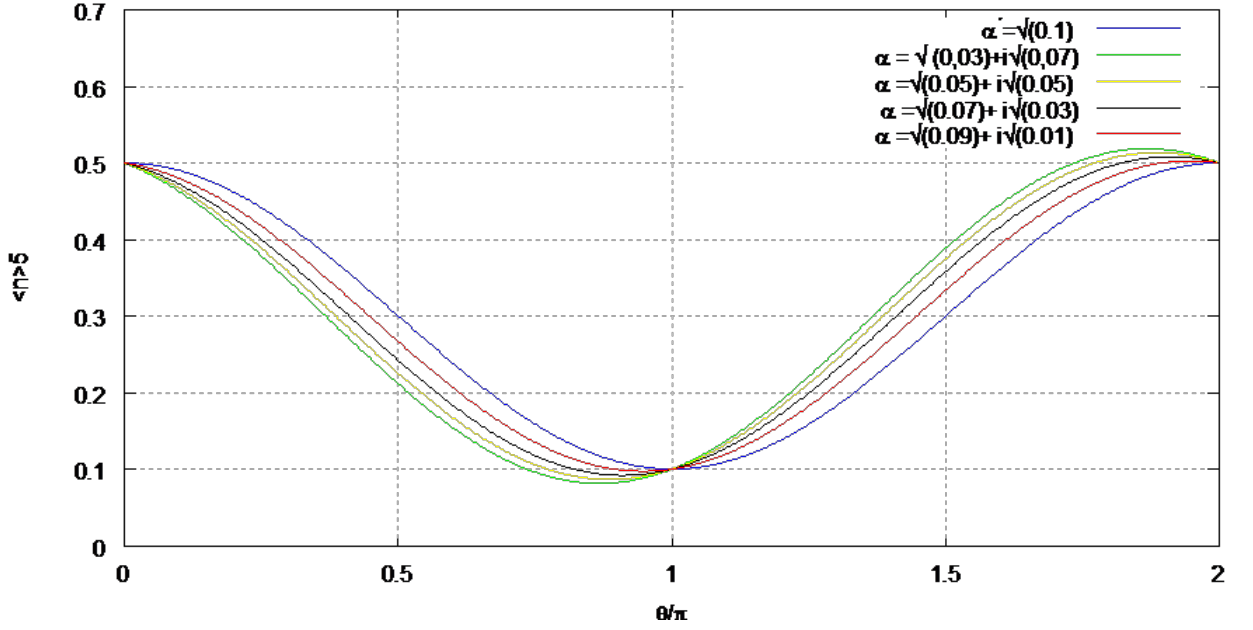


Figura 5.6: Gráfico da média de número de fóton na saída 5 do MZI para o estado  $|\psi_{01}^{in} = A|\alpha\rangle_0|1\rangle_1 + iB|-\alpha\rangle_0|0\rangle_1$  para diferentes valores de  $\alpha$  mantendo o valor de  $|\alpha|^2$  fixo e igual a 0,1.

$$\langle n \rangle_6 = \frac{1}{2} \sin^2(\theta/2) + |\alpha|^2 \cos^2(\theta/2) + \frac{\alpha''}{2} \sin(\theta) e^{-2|\alpha|^2}. \quad (5.3)$$

e,

$$\langle n \rangle_5 = \frac{1}{2} \cos^2(\theta/2) + |\alpha|^2 \sin^2(\theta/2) - \frac{\alpha''}{4} \sin(\theta) e^{-2|\alpha|^2}. \quad (5.4)$$

Observe que esses resultados são muito semelhantes àqueles obtidos na seção anterior no caso 2, onde calculamos a média do número de fótons do estado separável  $|\psi_{01}^{in}\rangle = |\alpha\rangle_0|1\rangle_1$ . Esse comportamento se torna mais claro quando se analisa a equação do operador densidade (veja a equação [4.76]) e todos os detalhes algébricos que utilizamos até chegar às equações [5.3] e [5.4], de modo que esses resultados correspondem aos estados coerentes (vácuo deslocado) e de Fock deslocado, como no caso 2, daí sua semelhança. No entanto, se o estado correspondente ao caso 5 for preparado com a componente imaginária,  $\alpha''$ , razoavelmente maior que a real, claramente observamos uma assimetria no comportamento do número médio de fótons (em ambos os modos); esse aspecto está contido na curva verde.

O comportamento assimétrico é substancialmente evidenciado se o "termos de interferência" tiver uma contribuição mais forte. Para isto, vemos que há uma espé-

cie de "competição" entre o fator  $e^{-2|\alpha|^2}$  e a parte imaginária do  $\alpha$ . Uma condição que evidencia esse aspecto é mostrada logo a seguir ( $|\alpha|^2 = 0.5$ , fig. 5.7).

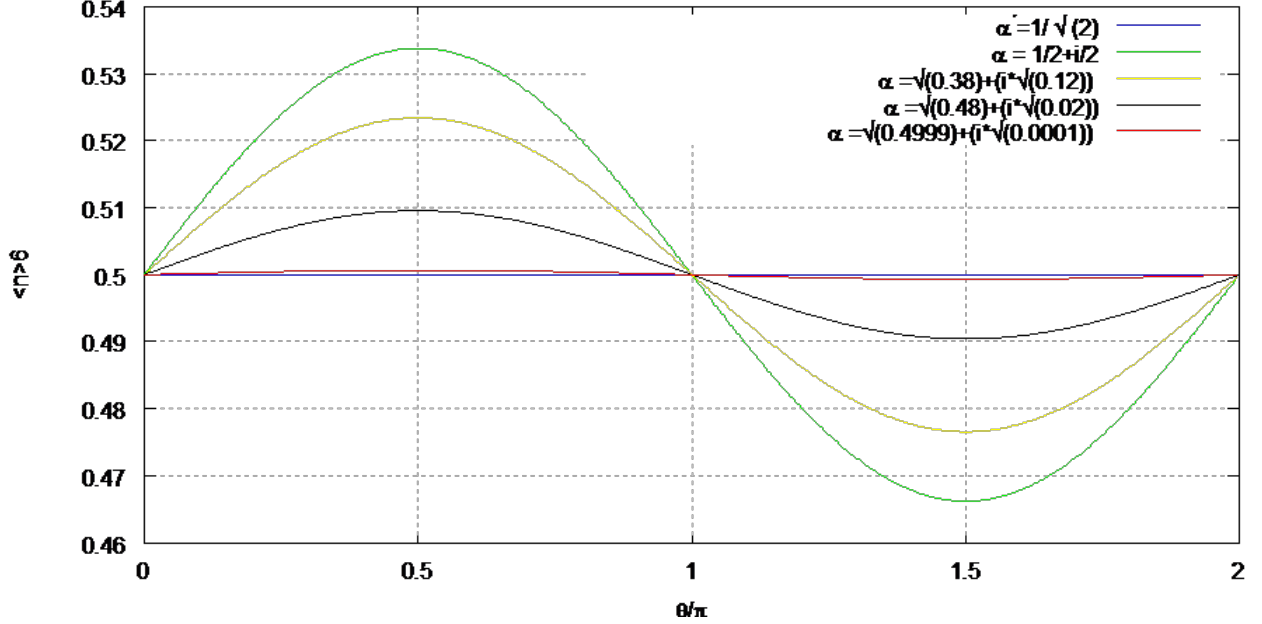


Figura 5.7: Gráfico da média de número de fóton na saída 6 do MZI para o estado  $|\psi_{01}^{in} = A|\alpha\rangle_0|1\rangle_1 + iB|-\alpha\rangle_0|0\rangle_1$  para diferentes valores de  $\alpha$  mantendo o valor de  $|\alpha|^2$  fixo e igual a  $1/2$ .

Com discussão análoga, os resultados contidos nos gráficos das figuras [5.7] e [5.8] mostram um aspecto que, em nossa visão, é razoavelmente interessante. A média para  $|\alpha|^2$  é independente do deslocamento de fase  $\theta$  (curva azul,  $\alpha$  puramente real). De certa forma, embora seja um resultado semelhante ao que tivemos no caso 2, a física contida no presente caso é totalmente diferente, uma vez que estamos com estados não-separáveis. Vale chamar a atenção que o comportamento da média de fótons no restante das curvas (exceto a azul), é relativamente acentuado, além de observarmos uma média nula para  $\theta = \pi$ . Finalmente, o resultados para  $|\alpha|^2 = 1$ .

Nos gráficos das figuras [5.9] e [5.10], observamos o caso relativamente trivial, onde as curvas praticamente coincidem com a curva azul. Isso significa que o termo de interferência torna-se desprezível para valores acima de  $|\alpha|^2 \geq 1$ .

Portanto, o caso 5 como um estado de entrada no MZI, apresenta um comportamento relativamente interessante sob dois pontos de vistas principais. O primeiro está relacionado com fato de que, se trocarmos  $\alpha$  por  $-\alpha$ , a média em ambos os modos apenas inverteriam seus papéis, como era de se esperar. O segundo é a não dependência com

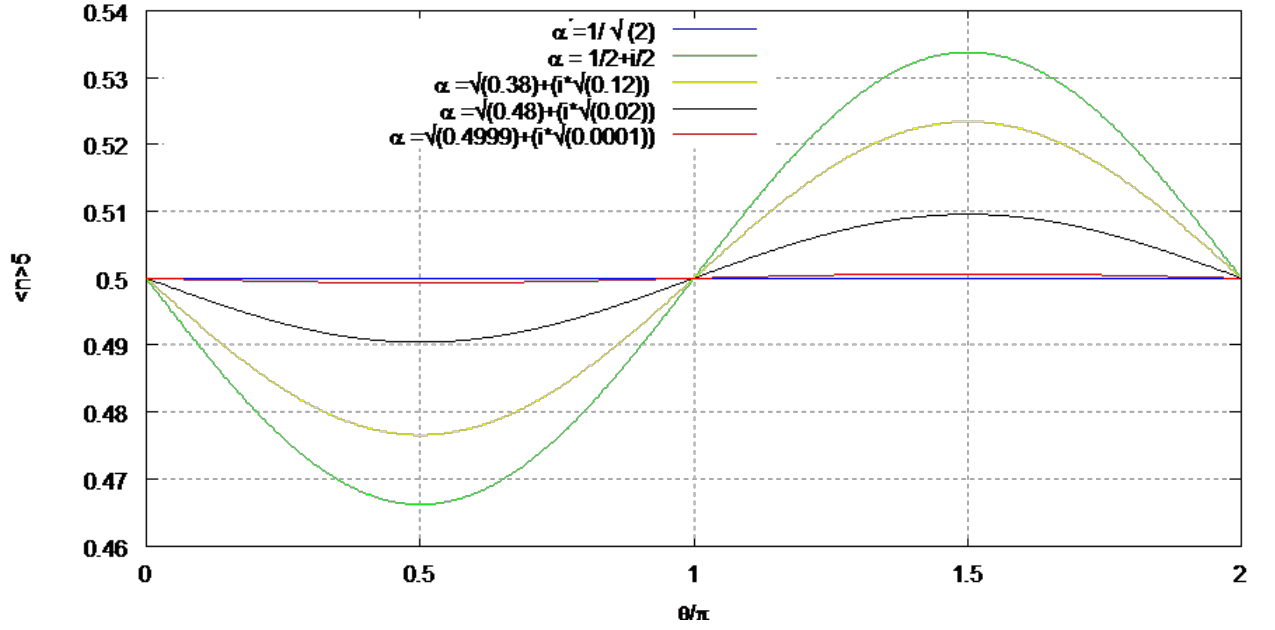


Figura 5.8: Gráfico da média de número de fóton na saída 5 do MZI para o estado  $|\psi_{01}^{in}\rangle = A|\alpha\rangle_0|1\rangle_1 + iB|-\alpha\rangle_0|0\rangle_1$  para diferentes valores de  $\alpha$  mantendo o valor de  $|\alpha|^2$  fixo e igual a  $1/2$ .

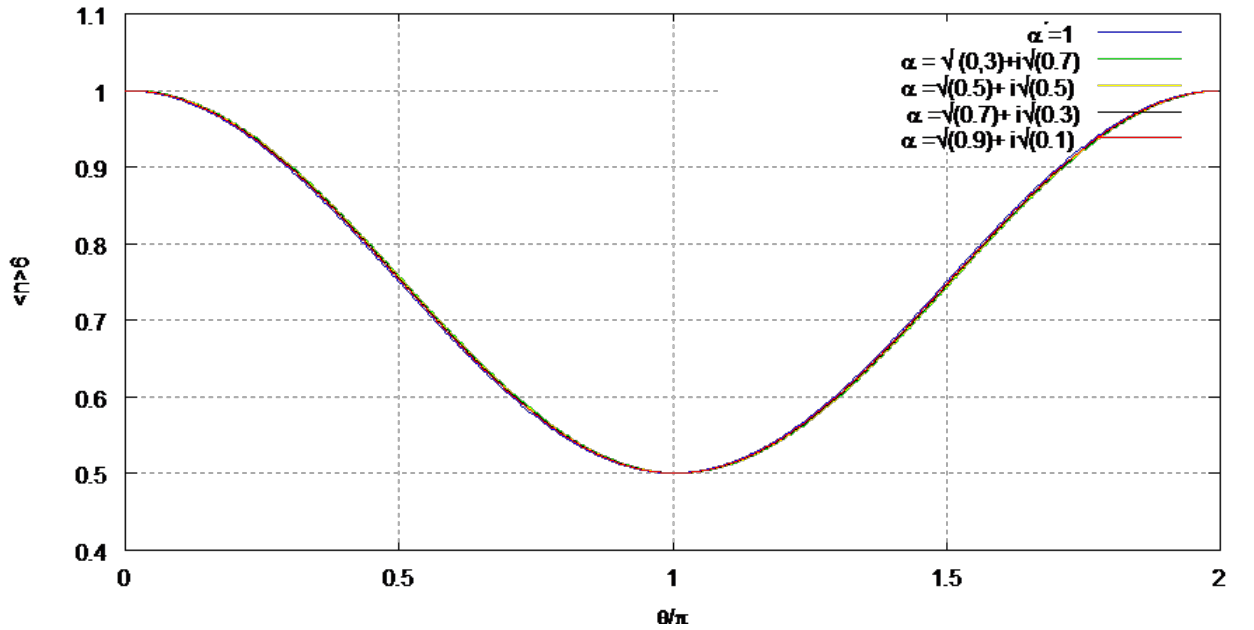


Figura 5.9: Gráfico da média de número de fóton na saída 6 do MZI para o estado  $|\psi_{01}^{in}\rangle = A|\alpha\rangle_0|1\rangle_1 + iB|-\alpha\rangle_0|0\rangle_1$  para diferentes valores de  $\alpha$  mantendo o valor de  $|\alpha|^2$  fixo e igual a 1.

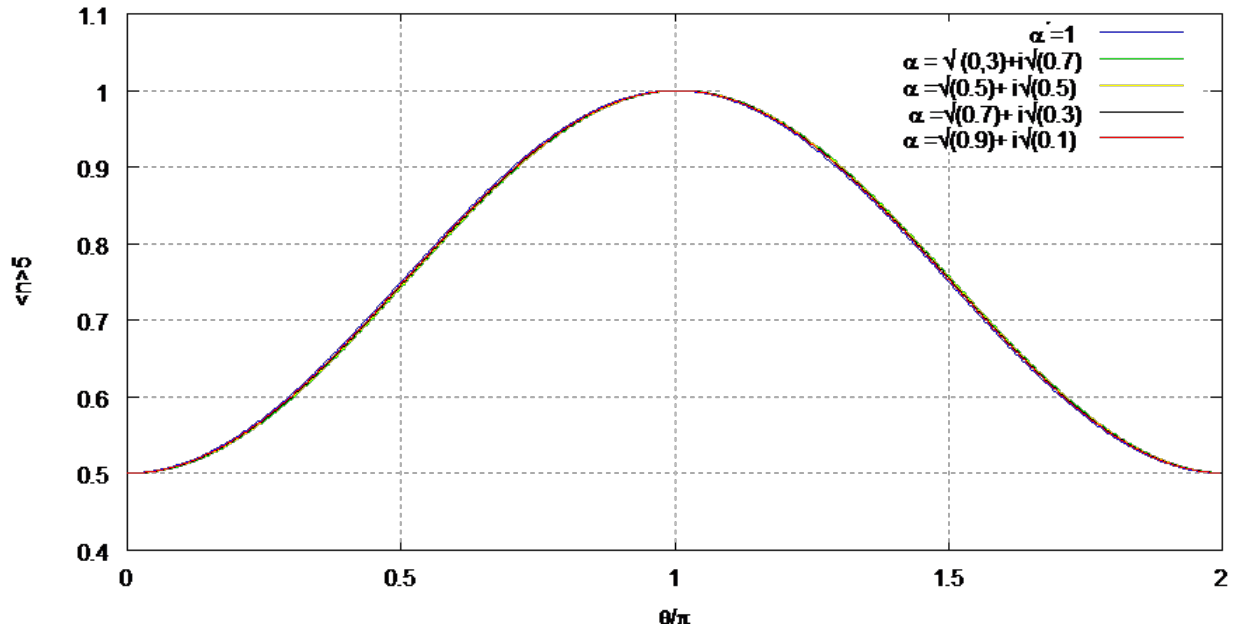


Figura 5.10: Gráfico da média de número de fóton na saída 5 do MZI para o estado  $|\psi_{01}^{in} = A|\alpha\rangle_0|1\rangle_1 + iB|-\alpha\rangle_0|0\rangle_1$  para diferentes valores de  $\alpha$  mantendo o valor de  $|\alpha|^2$  fixo e igual a 1.

$|\alpha|^2 = 1/2$ , que está ligado diretamente ao caráter emaranhado do estado, sendo este importante e de grande interesse teórico e experimental, como foi discutido brevemente na introdução.

# Capítulo 6

## Conclusão e perspectiva

Utilizando o formalismo usado no artigo escrito pelos autores *A. Windhager, M. Suda, C. Pacher, M. Peev, A. Poppe*, calculamos, de maneira relativamente simples, as matrizes densidades total e parcial na saída do MZI para diversos estados de entrada. Dos cinco estados de entrada (casos), obtidos no MZI, o que demos mais ênfase foram os casos 2 e caso 5, sendo que o caso 2 foi estudado na referência [8]. Logo em seguida, construímos um estado emaranhado híbrido, caso 5, que pode representar um estado de luz que atualmente tem sido intensamente explorado, principalmente nas áreas de informação quântica. Aplicamos o mesmo desenvolvimento algébrico utilizado por este artigo neste estado e obtemos a matriz densidade parcial reduzida e a média do número de fótons em relação aos dois modos de saídas, e construímos os gráficos dos dois casos, caso 2 e caso 5. Observamos que a média do número de fótons do caso 5 é composta por uma equação bem parecida com a obtida no caso 2, com a diferença que, no caso 5, existe um termo que denominamos de "interferência". Observamos que, para valores pequenos do módulo de  $\alpha$ , a diminuição da parte complexa juntamente com o aumento da parte real, mantendo fixo o valor de  $|\alpha|^2$ , leva o termo de interferência a zero. Semelhantemente, para valores de  $|\alpha|^2$  aproximadamente igual a um e, obviamente maiores que um, o termo de interferência também vai a zero devido à presença do exponencial elevado a  $-2|\alpha|^2$  que se torna muito pequeno. A partir dessas análises e considerando um caso particular para valores de  $|\alpha|^2 = 0$ ;  $|\alpha|^2 = 1$  e  $|\alpha|^2 = 4$ , construímos os gráficos da média do número de fótons para o caso 5 e obtivemos resultados bem parecidos em relação aos gráficos do caso 2. Observamos também que a fase fixa do caso 2 ocorre para  $|\alpha|^2 = 1$ . No caso 5, no entanto, a fase fixa ocorre para  $|\alpha|^2 = 1/2$  sendo que esta fase ocorre para valores pequenos da

parte complexa de  $\alpha$  em comparação a valores grandes da parte real, mantendo  $|\alpha|^2 = 1/2$ . Com isso, conseguimos apresentar uma alternativa de um formalismo algébrico que pode facilitar bastante os cálculos envolvendo o estudo dos comportamentos de estados híbridos no MZI. Por fim, no apêndice, utilizamos o estado dado por  $|\psi_{01}^{in}\rangle = |\alpha\rangle_0|0\rangle_1$ , caso 1, e aplicamos a dinâmica de campos térmicos desenvolvida por *UmezawaTakahashi*. Na ocasião, duplicamos o estado no espaço de Hilbert, termalizamos e verificamos a sua transformação na saída do MZI. Como perspectiva deste trabalho, como todo tratamento foi desenvolvido de forma teórica, deixaremos a análise avançada dos resultados obtidos a partir da verificação e associação de experimentos ópticos. Também, deixaremos como perspectiva, o cálculo da fidelidade, e das funções de Wigner para o estado que termalizamos.

# Capítulo 7

## Apêndice A

### 7.1 Termalização do estado $|\psi_{01}^{in} = |\alpha\rangle_0|0\rangle_1$

Neste apêndice iremos termalizar o estado  $|\psi_{01}^{in} = |\alpha\rangle_0|\alpha\rangle_1$

#### 7.1.1 Duplicação

$$H \times \tilde{H} \ni |\psi\rangle \times |\tilde{0}\tilde{0}\rangle = |\alpha\rangle_0|0\rangle_1 \times |\tilde{0}\rangle_0|\tilde{0}\rangle_1 = |0\rangle_1|\tilde{0}\rangle_1 \times |\alpha\rangle_0|\tilde{0}\rangle_0 \quad (7.1)$$

#### 7.1.2 Termalização

$$\begin{aligned} |\psi_{01}^{in}\rangle &= U_0(\beta)U_1(\beta)|\alpha\rangle_0|\tilde{0}\rangle_0|0\rangle_1|\tilde{0}\rangle_1 \\ &= |\alpha, \tilde{0}; \beta\rangle_0|0, \tilde{0}; \beta\rangle_1 \\ &= \hat{D}_0(\alpha; \beta)|0, \tilde{0}; \beta\rangle_0|0, \tilde{0}; \beta\rangle_1 \\ &= \hat{D}_0(\alpha; \beta)|0(\beta)\rangle_0|0(\beta)\rangle_1 \end{aligned} \quad (7.2)$$

#### 7.1.3 Estados de Saída no MZI

$$\begin{aligned} |\psi_{01}^{in}\rangle &\xrightarrow{MZI} \exp[\alpha(t'_M \hat{a}_5^\dagger(\beta) + r'_M \hat{a}_6^\dagger(\beta)) - \alpha^*(t_M^* \hat{a}_5(\beta) + r_M^* \hat{a}_6(\beta))] |0\rangle_3|0\rangle_3|0\rangle_4|0(\beta)\rangle_0|0(\beta)\rangle_1 \\ &= \hat{D}_5(t'_M \alpha) \hat{D}_5(r'_M \alpha) |0(\beta)\rangle_5 |0(\beta)\rangle_6. \end{aligned} \quad (7.3)$$

Portanto, o estado de saída é dado por,

$$|\psi_{01}^{out}\rangle = \hat{D}_5(t'_M\alpha)\hat{D}_5(r'_M\alpha)|0(\beta)\rangle_5|0(\beta)\rangle_6. \quad (7.4)$$

O operador densidade para o estado de saída é dado por,

$$\hat{\rho}_{56} = \hat{D}_5(t'_M\alpha)\hat{D}_5(r'_M\alpha)\tilde{\rho}_{56}\hat{D}_5^\dagger(t'_M\alpha)\hat{D}_5^\dagger(r'_M\alpha) \quad (7.5)$$

onde,

$$\tilde{\rho}_{56} = |0(\beta)\rangle_5|0(\beta)\rangle_6\langle 0(\beta)|_5\langle 0(\beta)|_6. \quad (7.6)$$

sendo que,

$$\tilde{\rho}_{56} = \frac{1}{(1+n(\beta))(1+m(\beta))} \sum_{n,m=0}^{\infty} \left(\frac{n(\beta)}{1+n(\beta)}\right)^n \left(\frac{m(\beta)}{1+m(\beta)}\right)^m |n\rangle_5|m\rangle_6\langle n|_5\langle m|_6. \quad (7.7)$$

A densidade parcial reduzida em relação ao modo 6 é dada por,

$$\begin{aligned} \rho_6 = Tr_5(\rho_{56}) &= \hat{D}_6(r'_M\alpha)Tr_5(\hat{D}_5(t'_M\alpha)\tilde{\rho}_{56}\hat{D}_5^\dagger(t'_M\alpha))\hat{D}_6^\dagger(r'_M\alpha) \\ &= \hat{D}_6(r'_M\alpha)Tr_5(\hat{D}_5(t'_M\alpha)\hat{D}_5^\dagger(t'_M\alpha)\tilde{\rho}_{56})\hat{D}_6^\dagger(r'_M\alpha) \\ &= \hat{D}_6(r'_M\alpha)Tr_5(\tilde{\rho}_{56})\hat{D}_6^\dagger(r'_M\alpha). \end{aligned} \quad (7.8)$$

Substituindo o valor de  $\tilde{\rho}_{56}$  na equação acima obtemos o seguinte resultado,

$$\rho_6 = \frac{\hat{D}_6^\dagger(r'_M\alpha; \beta)}{(1+n(\beta))^2} \sum_{n,m=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{n(\beta)}{1+n(\beta)}\right)^n \left(\frac{m(\beta)}{1+m(\beta)}\right)^m \langle j|_5n\rangle_5|m\rangle_6\langle n|_5\langle m|_6j\rangle_5\hat{D}_6^\dagger(r'_M\alpha; \beta) \quad (7.9)$$

Com algumas manipulações obtemos da equação acima,

$$\rho_6 = \frac{\hat{D}_6^\dagger(r'_M\alpha; \beta)}{(1+n(\beta))^2} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{n(\beta)}{1+n(\beta)}\right)^n |m\rangle_6\langle m|_6\hat{D}_6^\dagger(r'_M\alpha; \beta) \quad (7.10)$$

Para  $m = 0$  obtemos,

$$\rho_6 = \frac{\hat{D}_6^\dagger(r'_M\alpha; \beta)}{(1+n(\beta))^2} |0\rangle_6\langle 0|_6\hat{D}_6^\dagger(r'_M\alpha; \beta) \quad (7.11)$$



### 7.1.4 Média do número de fótons

$$\begin{aligned}
\langle n \rangle_6 &= \frac{1}{(1+n(\beta)^2)} \sum_{n=0}^{\infty} \langle n \hat{a}_6^\dagger \hat{a}_6 D_6(r'_M \alpha; \beta) | 0 \rangle_6 \langle 0 |_6 \hat{D}_6^\dagger(r'_M \alpha; \beta) | n \rangle_6 \\
&= \frac{1}{(1+n(\beta)^2)} \langle 0 |_6 \hat{D}_6^\dagger(r'_M \alpha; \beta) \hat{a}_6^\dagger \hat{a}_6 \hat{D}_6(r'_M \alpha; \beta) | 0 \rangle_6 \\
&= \frac{1}{(1+n(\beta)^2)} \langle 0 |_6 (\hat{a}_6^\dagger + r'_M \alpha^* u(\beta)) \hat{D}_6^\dagger(r'_M \alpha; \beta) \hat{D}_6(r'_M \alpha; \beta) (\hat{a}_6 + r'_M \alpha u(\beta)) | 0 \rangle_6 \\
&= \frac{1}{(1+n(\beta)^2)} |\alpha|^2 |r_M|^2 u^2(\beta) \tag{7.12}
\end{aligned}$$

# Referências Bibliográficas

- [1] Souza, D. D. **Criptografia Quântica com estados comprimidos da luz**. Campinas, SP:[s,n], 2011 . Dissertação de Mestrado.
- [2] Mandel, L.; Wolf, E. **Optical Coherence And Quantum Optics**. Cambridge: Cambridge Un. Press, 1995. 1166p. - Chap. 11, 1995, vol. 730, p. 522 - 572.
- [3] STEEL, W. H. **Interferometry**. Cambridge : Univ . Press, 1983.
- [4] HARIHARAN, P. **Optical Interferometry**. Sydney: Academic Press, 1985.
- [5] Weihs, A. Zeilinger. **"Photon statistics at beam-splitters: an essential tool in quantum information and teleportation"**. (Perina J. , ed.), Wiley, i, 2001.
- [6] Jeong, H.; Zavatta, A.; Kang, M.; Seung-Woo, L.; Costanzo L. S.; Grandi, S; Ralph T. C. e Bellini M.**Generation of hybrid entanglement of light** DOI: 10.1038/NPHOTON.2014.136, 2014.
- [7] GERRY, C.; KNIGHT, P. **Introductory Quantum Optics**. Optics. Cambridge: Cambridge University Press, 2004.
- [8] SUDA, M.; WINDHAGER, A.; PACHER, C.; PEEV, M. e POPPE, A. **Quantum Interference between a Single-Photon Fock State and a Coherent State** Viena : Optics Communications , arXiv:1009.1844 [quant-ph], 2011.
- [9] Hong, C. K.; Ou, Z. Y.; Mandel, L. **Measurement of subpicosecond time intervals between two photons by interference**. s.l. : phys. Rev. Lett 59, 1987. págs 2044 - 2046.
- [10] WEITHS, G.; TITTEL, W. **Photonic entanglement for fundamental test and quantum communication** Quant. Inf. Comp, 2001.

- [11] FREEDMAN, S. J. and CLAUSER, J. F. **Experimental test of local hidden - variable theories.** Lett. 28. 938, 1972.
- [12] HOFMANN, J. et. al. **Heralded entanglement between widely separated atoms.** in Science 337(6090): 72-5, 2012.
- [13] BRUNNER, N., CAVALCANTI, D., PIRONIO, S., SCARANI, V. and WEHNER, S. **Bell nonlocality.** s.l. : Rev. Mod. Phys, 86, 419?478, 2014.
- [14] Lynden K.; Shalm, K. et. al. **Strong Loophole-Free Test of Local Realism,** Phys. Rev. Lett. 115, 250402, 2015.
- [15] Guo, Q.; Liu-Young, C.; Chen, L.; Hong-Fu, W. and Zhang, S. **Counterfactual quantum-information transfer without transmitting any physical particles.** Article number: 8416. 5, 2015.
- [16] Gabriela, B. L. et al. and Anton Zeilinger, **Quantum imaging with undetected photons.** Nature 512, 409-412, 2014.
- [17] Kwon, H. And Jeong, H. **Generation of hybrid entanglement between a single-photon polarization qubit and a coherent state.** Phys. Rev. A 91, 012340, 2015.
- [18] Morin, O.; Huang, K.; Liu, J.; Jeannic, L. Fabre, C and Laurat, J. **Remote creation of hybrid entanglement between particle-like and wave-like optical qubits** Nature Photonics 8, 570?574, 2014
- Singapore : World Scientific, 2009.
- [19] F. C. KHANNA, A. P. C. MALBOUISSON, J.M.C. MALBOUISSON, A.E. SANTANA. **Thermal quantum Field theory: algebraic aspects and applications.** Singapore : World Scientific, 2009.
- [20] D.F. WALLS; G. J. MILBURN **Quantum Optics.** Berlin: Springer, 2 ed. 2008.
- [21] COHEN - TANNOUDJI, C. **QUANTUM MECHANICS.**s.l. : Vol.1, John Wiley Professio, 1991
- [22] R.J. GLAUBER, **Coherent and incoherent States of the Radiation Field** s.l. : Rev. v.131, n.6, 1963. págs. 2766?2788.

- [23] Scully, M.O.; Sargent III, M. **The concept of the photon**. Physics Today,p. 329-338, 1972.
- [24] E.A.POWER. **Introductory Quantum Eleetrodynamics**. London : Longmans, 1964.
- [25] SAKURAI, J. J. e NAPOLITANO, J. J. **Modern Quantum Mechanics**. s.l. : Addison-Wesley, 2 edition, 2010. 88 à 96
- [26] John F. Price. **Lie Groups and Compact Groups-London Mathematical Society Lecture Note Series**.Cambridge University Press, 1977. Págs 58 à 78.
- [27] CAHILL, K.E. E GLAUBER, R.J. **Ordered Expansions in Boson Amplitude Operators**. s.l. : Phys. Rev. v.177, n.5,, Jan 1969. págs.1857-1881.
- [28] Scully, M.O.; Zubairy, M.S. **Quantum Optics**. Cambridge: Cambridge Un. Press, 1997. 630p. - Sec. 4.4.2, p.125-131.
- [29] F.MINTERT, C. VIVIESCAS, E A. BUCHLEITNER. **Basic of Entangled States**.Berlin : springer-Verlag, 2009. 10.1007/978-3-540-88169-8 2.
- [30] SIMON, R. PERES-HORODECKI. **separability criterion for continous variable systems** s.l.: Phys.Rev. Lett., American Physical Society, v. 84, n. 12,, Mar 2000. págs. 2726 - 2729.
- [31] PERES, A. **Separability criterion for density matrices** s.l. : Physical Review Letters. APS, v.77.
- HORODECKI, M., HORODECKI, P. e HORODECKI, R. Separability of mixed states: necessary and sufficient conditions. s.l. : Physics Letters A, Elsevier, 1996. v. 223, n. 1-2, págs. 1?8.
- [32] HORODECKI, M., HORODECKI, P. e HORODECKI, R. **Separability of mixed states: necessary and sufficient conditions**.s.l. : Physics Letters A, Elsevier, 1996. v. 223, n. 1-2, págs. 1-8.
- [33] SIMON, R., MUKUNDA, N. e DUTTA, B. **Quantum - noise matrix for multimode systems: U(n) invariance, squeezing, and normal forms**. s.l. : Physical Review A, APS, 1994. v.49, n. 3, pág. 1567.

- [34] BENGTSSON, I. e ZYCKOWSKI, K. **Geometry of quantum states: an introduction to quantum entanglement**.s.l. : [S.i]: Cambridge Univ Pr, 2006.
- [35] STOKES, G.G. Cambridge : Dublin Math, 1849.
- [36] Planck Collaboration, P. A. R. Ade, N. Aghanim, M. Arnaud, M. Ashdown, J. Aumont, C. Baccigalupi, A. J. Banday, R. B. Barreiro, E. Battaner, et al., ArXiv eprints (2014), 1406.7482.
- [37] M. E. Mosquera and O. Civitarese, *Astron. and Astrophys.* 551, A122 (2013).
- [38] S. Galli, *Phys. Rev. D* 87, 123516 (2013), 1212.1075.
- [39] HOLANDA, R. F. L.; LANDAU, S. J. ; ALCANIZ, J. S.; SANCHEZ G., I. E. and BUSTI, V. C. **Constraints on a possible variation of the  $\Omega_m$  structure constant from galaxy cluster data**. Arxiv.org/abs/1510.07240v1
- [40] S. J. e. a. La Roque, *ApJ* 652, 917 (2006).
- [41] T. Damour, F. Piazza, and G. Veneziano, *Physical Review Letters* 89, 081601 (2002)
- [42] MARTINS, C. J. A. P.; VIELZEUF, P. E.; MARTINELLID, M.; CALABRESEE, E.; PANDOLFIF, S. **Evolution of the  $\Omega_m$ -structure constant in runaway dilaton models**. arxiv.org/abs/1503.05068v1.

# Referências Bibliográficas

- [1] H. Araki and E. Woods. Representations of the canonical commutation relations describing a nonrelativistic infinite free bose gas. *Journal of Mathematical Physics*, 4(5):637–662, 1963.
- [2] S. M. Barnett and P. M. Radmore. *Methods in theoretical quantum optics*, volume 15. Oxford University Press, 2002.
- [3] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, and F. Laloe. *Quantum Mechanics*. Wiley-VCH.
- [4] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, G. Grynberg, and P. Thickstun. *Atom-photon interactions: basic processes and applications*. Wiley Online Library, 1992.
- [5] C. d. V. da Silva Lima. Efeitos dissipativos na inversao atômica segundo o modelo de jaynes-cummings. 2006.
- [6] V. Dorobantu. The postulates of quantum mechanics. Technical report, 2006.
- [7] A. d. Freitas Neto. Manipulação coerente de pontos quânticos em nanocavidades. 2013.
- [8] C. Gardiner and P. Zoller. *Quantum noise: a handbook of Markovian and non-Markovian quantum stochastic methods with applications to quantum optics*, volume 56. Springer Science & Business Media, 2004.
- [9] C. W. Gardiner et al. *Handbook of stochastic methods*, volume 3. Springer Berlin, 1985.
- [10] R. J. Glauber. Coherent and incoherent states of the radiation field. *Physical Review*, 131(6):2766, 1963.
- [11] S. E. Harris. Electromagnetically induced transparency. IEEE, 1997.

- [12] W. Israel. Thermo-field dynamics of black holes. *Physics Letters A*, 57(2):107–110, 1976.
- [13] J. D. Jackson. *Classical Electrodynamics*. Wiley, 1998.
- [14] F. C. Khanna, A. P. Malbouisson, J. Malbouisson, and A. E. Santana. *Thermal quantum field theory: algebraic aspects and applications*. World Scientific Books, 2009.
- [15] H. Kimble, M. Dagenais, and L. Mandel. Photon antibunching in resonance fluorescence. *Physical Review Letters*, 39(11):691, 1977.
- [16] R. Loudon. *The quantum theory of light*. OUP Oxford, 2000.
- [17] J. Maldacena. Eternal black holes in anti-de sitter. *Journal of High Energy Physics*, 2003(04):021, 2003.
- [18] D. Mi, H.-S. Song, and Y. An. A physical explanation for the tilde system in thermo field dynamics. *Modern Physics Letters A*, 16(10):655–661, 2001.
- [19] J. Schwinger. Brownian motion of a quantum oscillator. *Journal of Mathematical Physics*, 2(3):407–432, 1961.
- [20] M. O. Scully and M. S. Zubairy. *Quantum optics*. Cambridge university press, 1997.
- [21] R. Shankar. *Principles of quantum mechanics*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [22] J. B. Soares. Notas de aula de mecânica quântica. *Departamento de Física Nuclear e Altas Energias (UERJ)*, 2011.
- [23] Y. Takahashi. Collective phenom. 2 55 umezawa h, matsumoto h and tachiki m 1982 thermo field dynamics and condensed states, 1975.
- [24] T. Tominaga, M. Ban, T. Arimitsu, J. Pradko, and H. Umezawa. Spin relaxation in terms of thermo field dynamics. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 149(1-2):26–48, 1988.
- [25] N. G. Van Kampen. *Stochastic processes in physics and chemistry*, volume 1. Elsevier, 1992.