



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE  
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA  
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA  
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA  
**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

Efeito Aharonov-Bohm Análogo com quebra de simetria de Lorentz

**Wagner de Almeida Barbosa**

CAMPINA GRANDE

- fevereiro 2016 -

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE  
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA  
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA  
**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

Efeito Aharonov-Bohm Análogo com quebra de simetria de Lorentz

**Wagner de Almeida Barbosa**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Campina Grande, como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Marcos Antônio Anacleto

CAMPINA GRANDE

- Fevereiro 2016 -

B238e      Barbosa, Wagner de Almeida.  
              Efeito Aharonov-Bohm análogo com quebra de simetria de Lorentz /  
              Wagner de Almeida Barbosa. – Campina Grande, 2016.  
              39 f. : il. color.

              Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Federal de Campina  
              Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2016.  
              "Orientação: Prof. Dr. Marcos Antônio Anacleto".  
              Referências.

              1. Buracos Negro Acústico. 2. Efeito Aharonov-Bohm. 3. Violação-  
              Lorentz. 4. Espalhamento. I. Anacleto, Marcos Antônio. II. Título.

CDU 524.882(043)

EFEITO AHARONOV-BOHM ANÁLOGO COM QUEBRA DE  
SIMETRIA DE LORENTZ

WAGNER DE ALMEIDA BARBOSA

Aprovada em \_\_\_\_\_

BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Dr. Marcos Antônio Anacleto  
Orientador

---

Prof. Dr<sup>a</sup>. Morgana Lígia de Farias Freire  
Examinador Externo

---

Prof. Dr. Aécio Ferreira de Lima  
Examinador Interno

*”Todas as coisas me são lícitas,  
mas nem todas convêm .”*

Paulo de Tarso

# Agradecimentos

Agradeço primeiramente à Deus por esta sempre ao meu lado, sem seu apoio jamais conseguiria concluir a dissertação. Agradeço a meu orientador professor Dr. Marcos Antônio Anacleto por toda a paciência. Em especial a minha Mãe, Joana Raimunda de Almeida por todo o carinho e amor, e a minha tia, Maria de Fátima de Almeida, e meu irmão, o qual jamais mediram esforços para que eu pudesse realizar meus sonhos, obrigado por tudo.

Agradeço ao Professor Dr. Aécio Ferreira de Lima que é um excelente professor e um exemplo a ser seguido.

Agradeço a minha noiva e amiga, Maria do Socorro Moreira de Arruda onde encontrava meu porto seguro nos momentos de dificuldade, obrigado por esta sempre ao meu lado.

Agradeço os professores do curso de pós-graduação em Física e também aos professores da Unidade Acadêmica de Física .Agradeço a Capes pelo suporte financeiro .

Por fim, agradeço a todos os meus colegas de estudos e professores, a meus amigos que sempre que retornava para a minha cidade estavam a festejar a minha chegada, obrigador por me proporcionar tamanha alegria, obrigado pela a sua amizade.

Obrigado a todos !

*A minha mãe .*

# Lista de Figuras

|     |   |    |
|-----|---|----|
| 2.1 | Experiência de interferência no sentido de Aharonov-Bohm [13] . . . . . | 9  |
| 3.1 | Ergor-região e Horizonte de evento . . . . .                            | 21 |
| 3.2 | Buraco Negro Análogo . . . . .  | 22 |



# Sumário

|   |           |
|---|-----------|
| Agradecimentos                                    | v         |
| Lista de Figuras                                  | vii       |
| Resumo  | x         |
| Abstract  | xi        |
| <b>1 Introdução</b>                               | <b>1</b>  |
| <b>2 O Efeito Aharonov-Bohm</b>                   | <b>4</b>  |
| 2.1 Potenciais Eletromagnéticos . . . . .         | 4         |
| 2.2 Transformação de Calibre . . . . .            | 5         |
| 2.3 Equação de Schrodinger . . . . .              | 6         |
| 2.4 Efeito Aharonov-Bohm Original . . . . .       | 8         |
| 2.5 Efeito Aharonov-bohm e espalhamento . . . . . | 11        |
| <b>3 Modelo análogo acústico ao Buraco Negro</b>  | <b>13</b> |
| 3.1 Hidrodinâmica do Fluido . . . . .             | 13        |
| 3.2 A Métrica Acústica . . . . .                  | 16        |
| 3.3 Geometria de Vórtice . . . . .                | 19        |
| <b>4 Efeito Aharonov-Bohm Análogo</b>             | <b>23</b> |
| 4.1 Banheira de Drenagem e Vórtice . . . . .      | 23        |
| 4.2 Análogo ao Efeito Aharonov-Bohm . . . . .     | 29        |
| 4.3 Modelo de Violação-Lorentz . . . . .          | 30        |
| <b>5 Conclusão e perspectiva</b>                  | <b>36</b> |



# Resumo

Neste trabalho, consideramos a métrica de um buraco negro acústico e usamos um termo de fundo que viola Lorentz a partir de um modelo abelianos de Higgs, para o estudo do efeito Aharonov-Bohm. O objetivo do nosso trabalho é encontra o espalhamento Aharanov-Bohm análogo sobre o termo de quebra de simetria. Concluimos que a mudança de fase persiste mesmo quando os termos relacionados a circulação e a drenagem são zeros, diferente do efeito Aharonov-Bohm usual .

Palavras-chave: Buraco Negro Acústico. Efeito Aharonov-Bohm. Espalhamento. Violação-Lorentz.

# Abstract

In this paper, we consider the metric of a usual acoustic black hole and use a background term which violates Lorentz from an Abelian Higgs model, to study the effect Aharonov-Bohm. The aim of our work is found the Aharonov-Bohm scattering analogous to the symmetry breaking term. We conclude that phase change persists even when the terms related to circulation and drainage are zeros, unlike the usual Aharonov-Bohm effect.

Keywords: Black Hole Acoustic . Aharonov-Bohm effect. scattering .Lorentz-violation .

# Capítulo 1

## Introdução

A ideia inicial sobre o estudo de buracos negros foi apresentado em 1784 por John Michell [1], ele declarou que podia existir estrelas tão compactas, com uma grande quantidade de massa, que sua velocidade de escape do seu campo gravitacional seria superior ao da luz. Esta ideia não foi muito considerada na época, pois não se tinha um conhecimento da relatividade geral de Einstein.

Com a chegada da Relatividade Geral, a gravidade toma uma nova roupagem e passa a ser interpretada como uma deformação do espaço-tempo, onde a trajetória da partícula seria agora influenciada por uma curvatura do espaço-tempo. Não demorou muito para que o físico alemão Schwarzschild [2], obtivesse uma solução para um objeto esférico massivo na origem de coordenada. Ele demonstrou a existência de uma singularidade de sua métrica onde toda a matéria estaria concentrada em um único ponto, criando uma região de volume nulo e densidade infinita. Foi observada outra singularidade em um determinado ponto, onde ficou conhecido como o raio de Schwarzschild, região que circunda esse ponto de densidade infinita.

Em 1958, David Finkelstein [3] introduziu um novo sistema de coordenadas que remove a singularidade do raio de Schwarzschild, a partir daí foi implementado o conceito de horizonte de evento para essa superfície que antes era considerado singular. Esse horizonte de evento é visto como um divisor unidirecional do espaço tempo, ou seja, um observador interno ao horizonte de evento tem acesso a toda informação que ocorre na região externa, mas o observador externo não conseguiu saber o que se passa em um região interna. Assim, ressurgia o conceito de buraco negro. Outras soluções da equação de Einstein foi apresentada a comunidade científica, como o buraco negro de Kerr com

rotação e buraco negro de Reissner-Nordström com carga elétrica, todas as propriedades dos buracos negros podem ser descritas pela sua massa, carga e momento angular, veja a seguinte referência [4].

O Físico Britânico, Stephen Hawking descobriu um efeito interessante na região próxima do horizonte de evento, a emissão de radiação que ficou conhecida como a radiação Hawking [5], fazendo com que o buraco negro não fosse totalmente "negro". Acontece o seguinte caso, partículas que surgem muito próximas dos horizontes de eventos de um buraco negro, o campo gravitacional pode separar com a captura de um anti-fóton, e emitir um fóton para o infinito. Assim teria uma radiação sendo emitida de um horizonte de evento de um buraco negro. Mesmo com todas essas informações pela teoria de Hawking nunca teve uma verificação empírica, isso porque a radiação prevista é extremamente fraca, se tornando quase impossível ser observada com as técnicas que disponha.

Em 1981, W.G. Unruh [6] a partir das equações fundamentais do fluido ideal que são governados pela mecânica newtoniana, observou que ondas sonoras em movimento se comporta equivalente a luz em um campo gravitacional, e podem ser regidas pela equação de Klein-Gordon em um espaço curvo. A motivação para desenvolver um análogo, era a necessidade de investigar a radiação Hawking e outros fenômenos para o melhor entendimento da gravitação quântica.

A grande procura por estudos análogos deu-se uma década depois, interessados não apenas por estudos teóricos, mas por questões experimentais de encontrar em laboratório um efeito análogo a relatividade geral. Os sistemas físicos mais considerados, são os baseados em flutuações quânticas em hélio líquido, ondas eletromagnéticas em meios dielétrico e flutuações quânticas em condensados de Bose-Einstein. veja a seguintes referências sobre estes modelos análogos [7].

O objetivo desta dissertação foi encontrar o efeito de espalhamento Aharonov-Bohm análogo, usando uma métrica usual para o buraco negro acústico em um modelo que viola Lorentz [8],[9],[10].

No capítulo 2, fizemos uma revisão dos potenciais eletromagnéticos e vimos que os mesmos são invariantes por transformação de Lorentz. Subsequente, estudamos o efeito Aharonov-Bohm, que é um fenômeno quântico, em que a dinâmica da partícula carregada é influenciada por campos eletromagnéticos em regiões onde os campos são zeros. O efeito se destaca em uma região de interferência onde foi observado um deslocamento de

fase relativa. Na verdade, o efeito foi primeiro testado em 1960 [11], e tem sido confirmado em uma serie de experimentos .

No capitulo 3, estudamos o buraco negro acústico, mostramos como foi feita esta analogia para a relatividade geral e de como obter uma métrica acústica análoga ao buraco negro.

No capitulo 4, usamos a métrica métrica acústica de um buraco negro análogo, juntamente com um termo de quebra de simetria de Lorentz e calculamos o espalhamento Aharonov-Bohm análogo,e no capitulo concluimos com alguns resultados a respeito do espalhamento via um termo de quebra de simetria.

# Capítulo 2

## O Efeito Aharonov-Bohm

### 2.1 Potenciais Eletromagnéticos

Na eletrodinâmica clássica, os potenciais eletromagnéticos  $\phi$  e  $\mathbf{A}$  são convenientes para definição dos campos elétrico ( $\mathbf{E}$ ) e magnético ( $\mathbf{B}$ ), descrita pela seguintes equações[12] :

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (2.1)$$

Em mecânica quântica, usamos o formalismo canônico os potenciais não são eliminados, mesmo assim, essas equações bem como as quantidades físicas são todas invariantes por transformações de calibre, podemos pensar que os potenciais não tem nenhum significado, necessitamos de uma nova interpretação para os potenciais na mecânica quântica. Em 1959, com o trabalho publicado por Aharonov e Bohm [13], surgem as primeiras ideias para os potenciais eletromagnéticos como quantidades física reais. O efeito Aharonov e Bohm é um fenômeno puramente da mecânica quântica, que pode ser descrita pelo o formalismo de Hamilton .

Na mecânica clássica o hamiltoniano descreve a energia total do sistema é :

$$H = T + V(x). \quad (2.2)$$

onde  $V$  representa a energia potencial e  $T$  descreve a energia cinética da partícula . Em geral podemos reescrever o hamiltoniano da Equação (2.2) da seguinte forma :

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + v(\mathbf{x}), \quad (2.3)$$



onde  $\mathbf{p}$  é o momento canônico e pode ser representado pelo operador  $\mathbf{p} = \frac{\hbar}{i}\nabla$  e  $m$  a massa da partícula, diferente da mecânica clássica, na mecânica quântica os potenciais desempenham um papel importante, e por isso, o hamiltoniano deve ser descrito em termos dos potenciais  $\phi$  e  $\mathbf{A}$ , e não em termos de  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$ . A hamiltoniana para uma partícula num campo eletromagnético externo é dada da seguinte forma [14]:

$$H = \frac{1}{2m}(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A})^2 + e\phi + \mathbf{v}(\mathbf{x}), \quad (2.4)$$

onde  $\mathbf{p}$  representa o momento canônico,  $\mathbf{A}$  o potencial vetor,  $\phi$  potencial eletromagnético e  $\mathbf{v}(\mathbf{x})$  descreve a contribuição da energia potencial.

A Equação de Schrodinger é escrita da seguinte maneira

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = H\Psi. \quad (2.5)$$

o hamiltoniano correspondente é descrito pela Equação (2.4), fazendo a substituição, a equação geral de Schrodinger para problemas puramente eletromagnético é :

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \left[ \frac{1}{2m}(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A})^2 + e\phi \right] \Psi. \quad (2.6)$$

## 2.2 Transformação de Calibre

Fazendo uma modificação no potencial vetor  $\mathbf{A}$ , da seguinte maneira :

$$\mathbf{A}'(\mathbf{x}, t) = \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) + \nabla\Lambda(x, t). \quad (2.7)$$

em que  $\Lambda(x, t)$  é qualquer função de posição e tempo, denominada de transformação de calibre. Substituindo o potencial transformado nas equações eletromagnéticas verificamos se elas são invariantes, o campo eletromagnético é representado pelas Equações (2.1).

Colocado o potencial modificado, teremos que:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) + \nabla \times \nabla\Lambda(x, t). \quad (2.8)$$

Sabendo que  $\nabla \times \nabla\Lambda(x, t) = 0$ , temos que:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (2.9)$$

A Equação 2.7 será invariante sobre a transformação de calibre

O campo elétrico é descrito pela seguinte equação :

$$\mathbf{E}' = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t} - \nabla \phi'. \quad (2.10)$$

com procedimentos semelhantes ao feito para o campo magnético, substituímos o potencial vetor modificado da Equação (2.7) na Equação (2.1), temos :

$$\mathbf{E}' = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} [\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) + \nabla \Lambda] - \nabla \phi'. \quad (2.11)$$

o qual pode ser também escrito como:

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \left[ \phi' + \frac{1}{c} \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \right]. \quad (2.12)$$

se  $\phi = \phi' + \frac{1}{c} \frac{\partial \Lambda}{\partial t}$ , então a Equação (2.12) é dada por :

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \phi. \quad (2.13)$$

Podemos alterar os potenciais  $\mathbf{A}$  e  $\phi$ , com as seguintes transformações de calibre, e não ter efeitos nos campos  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$ , ou seja:

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \Lambda \quad (2.14)$$

$$\phi' = \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \Lambda}{\partial t}. \quad (2.15)$$

## 2.3 Equação de Schrodinger

A equação geral de Schrodinger para problemas eletromagnéticos pode ser escrita usando a equação (2.6). Para encontrar uma transformação para a função de onda  $\Psi$ , vamos usar a seguinte função como ponto de partida [15].

$$\Psi = \psi' e^{-is(x,t)} \quad s(x,t) = \frac{e}{\hbar c} \Lambda(x,t). \quad (2.16)$$

Observando o lado esquerdo da Equação (2.16), faremos a deriva de  $\Psi$ , temos .

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \left[ \frac{\partial}{\partial t} - i \frac{\partial s(x,t)}{\partial t} \right] \psi' e^{-is(x,t)}. \quad (2.17)$$

multiplicando por um fator  $e^{iS(x,t)}$ , vem que :

$$e^{is(x,t)} \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \left[ \frac{\partial}{\partial t} - i \frac{\partial s(x,t)}{\partial t} \right] \psi' e^{-is(x,t)} e^{is(x,t)}. \quad (2.18)$$

identificando  $\Psi = \psi' e^{-is(x,t)}$ , teremos a seguinte equação:

$$e^{is(x,t)} \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \left[ \frac{\partial}{\partial t} - i \frac{\partial s(x,t)}{\partial t} \right] \Psi e^{is(x,t)}. \quad (2.19)$$

Para deixar a Equação (2.19) semelhante ao lado esquerdo da equação de Schrodinger, precisamos apenas multiplicar por uma exponencial do seguinte tipo  $i\hbar e^{-is(x,t)}$ , com essa multiplicação ficamos com o lado esquerdo da equação de Schrodinger .

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = i\hbar e^{-is(x,t)} \left[ \frac{\partial}{\partial t} - i \frac{\partial s(x,t)}{\partial t} \right] \psi e^{is(x,t)}. \quad (2.20)$$

No lado direito, temos a seguinte expressão:

$$\left[ \left( \frac{1}{2m} \mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 + e\phi \right] \Psi. \quad (2.21)$$

onde  $\mathbf{p}$  é um operador descrito por  $\mathbf{p} = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t}$ , podemos reescrever a parte onde tem dependência temporal, da seguinte forma :

$$\frac{\partial}{\partial t} = e^{-is(x,t)} \left[ \frac{\partial}{\partial t} - i \frac{\partial s(x,t)}{\partial t} \right] e^{is(x,t)}. \quad (2.22)$$

Podemos, ainda, fazer em termos das derivas espaciais  $\nabla$  [16], assim ficamos com :

$$\nabla = e^{-is(x,t)} (\nabla - i\nabla s(x,t)) e^{is(x,t)}. \quad (2.23)$$

Usando essa equação (2.23), juntamente com as transformações de calibre encontrada para os potenciais . Após manipulações algébricas, ficamos com :

$$\left[ \left( \frac{1}{2m} \mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 + e\phi \right] \Psi = \left[ e^{-is(x,t)} \frac{1}{2m} \left( \frac{\hbar}{i} \nabla - \frac{e}{c} \mathbf{A}' \right)^2 e^{is(x,t)} - e\phi' \right] \Psi \quad (2.24)$$

combinado a Equação (2.20) com a Equação (2.24), temos

$$i\hbar \left[ \frac{\partial}{\partial t} - i \frac{\partial s(x,t)}{\partial t} \right] \psi e^{is(x,t)} = \left[ \frac{1}{2m} \left( \frac{\hbar}{i} \nabla - \frac{e}{c} \mathbf{A}' \right)^2 - e\phi' \right] \psi e^{is(x,t)}. \quad (2.25)$$

que reescrevendo de uma forma mais compacta, apresenta-se como a mesma forma geral da equação de Schrodinger, ou seja:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi' = \left[ \frac{1}{2m} \left( \frac{\hbar}{i} \nabla - \frac{e}{c} \mathbf{A}' \right)^2 - e\phi' \right] \Psi'. \quad (2.26)$$

com a função de onda transformada dada por :

$$\Psi' = \psi e^{\frac{ie}{\hbar c} \Lambda(x,t)}. \quad (2.27)$$

Daí a transformação de calibre, denominada de  $U$ , definimos como sendo

$$U = e^{\frac{ie}{\hbar} \Lambda(x,t)}. \quad (2.28)$$

o operador  $U$  é um operador unitário, a física não é inalterada e todas as quantidades observáveis são invariantes [17].

## 2.4 Efeito Aharonov-Bohm Original

O efeito Aharonov-Bohm é um fenômeno quântico em que a dinâmica da partícula carregada será afetada pelo o campo eletromagnético apesar de estar em uma região onde ambos os campos são zeros. Tornou-se amplamente conhecido após o desenvolvimento do trabalho do Aharonov-Bohm [13]. Imaginemos o seguinte cenário descrito na figura abaixo 2.1

Inicialmente uma função de onda  $\psi(x)$  emite um feixe de elétron que é dividido em dois seguimento que passam entorno de um solenoide e depois se reencontram-se na tela de interferência, se considerarmos o solenóide extremamente longo [12], o campo magnético interno será uniforme e campo externo será zero. Mas, o potencial vetor  $\mathbf{A}$  fora do solenóide não é zero . Sendo as novas regiões simplesmente conexa, podemos escrever uma solução da seguinte forma [13].

$$\Psi(x, t) = \psi_{1,0}(x, t) + \psi_{2,0}(x, t); \quad (2.29)$$

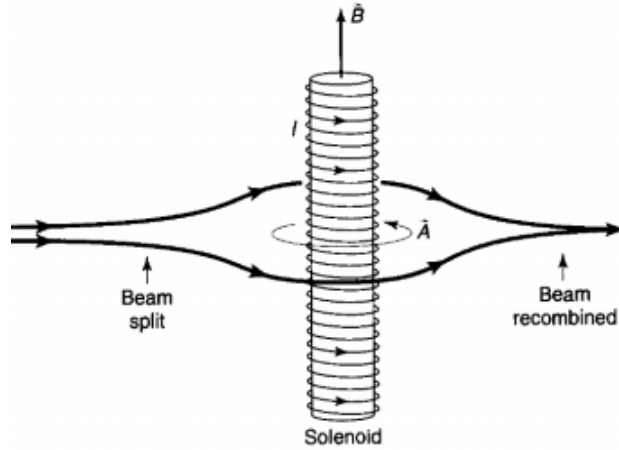


Figura 2.1: Experiência de interferência no sentido de Aharonov-Bohm [13]

onde,  $\psi_1$  e  $\psi_2$  estar relacionado a cada caminho tomado pelo o feixe de elétron a partir da divisão, será descrito da forma que segue

$$\psi_1 = \psi_{1,0} e^{\frac{iS_1}{\hbar}} \quad (2.30)$$

$$\psi_2 = \psi_{2,0} e^{\frac{iS_2}{\hbar}}; \quad (2.31)$$

a equações que corresponde os termos  $S_1$  e  $S_2$ , são mostrada como

$$S_1(x) = \int_{x_1}^x A(x') dx'. \quad (2.32)$$

$$S_2(x) = \int_{x_2}^x A(x') dx'. \quad (2.33)$$

assim, a função de onda total pode ser escrita como a combinação linear .

$$\Psi(\mathbf{x}, t) = \psi_{1,0}(x, t) e^{\frac{iS_1}{\hbar}} + \psi_{2,0}(x, t) e^{\frac{iS_2}{\hbar}}; \quad (2.34)$$

o fluxo magnético que atravessa uma superfície  $\sigma$ , é descrita pela a seguinte equação

$$\phi = \int_{\sigma} \mathbf{B} d\sigma. \quad (2.35)$$

onde  $\sigma$ , é delimitada pelas as regiões correspondentes ao caminho percorrido por  $\psi_1$  e  $\psi_2$  . usando a seguinte relação para o campo magnético

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (2.36)$$

chegamos na seguinte equação

$$\phi = \int_{\sigma} \mathbf{B} d\sigma = \int_{\sigma} (\nabla \times \mathbf{A}) d\sigma. \quad (2.37)$$

O teorema de Stokes, nos permite transformar a superfície integrante de uma integral de linha sobre o limite de  $\sigma$  [19].

$$\phi = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \int_{x_1}^x A(x') dx' - \int_{x_2}^x A(x') dx = \frac{\Delta S}{\hbar}. \quad (2.38)$$

a interferência entre os dois feixe criam uma diferença de fase, que pode ser descrita por [13]

$$\frac{\Delta S}{\hbar} = \frac{e}{\hbar c} \oint \mathbf{A} dx. \quad (2.39)$$

substituindo as equações 2.32 e 2.33 em 2.34 , ficamos com .

$$\Psi = \left[ \psi_{1,0} e^{\frac{ie}{\hbar c} \int_{x_1}^x A(x) dx} + \psi_{2,0} e^{\frac{ie}{\hbar c} \int_{x_2}^x A(x) dx} \right]. \quad (2.40)$$

colocando termo da fase de  $\psi_2$  em evidencia, ficamos com a seguinte expressão

$$\Psi = \left[ \psi_{1,0} e^{\frac{ie}{\hbar c} \int_{x_1}^x A(x) dx - \int_{x_2}^x A(x) dx} + \psi_{2,0} \right] e^{\frac{ie}{\hbar c} \int_{x_2}^x A(x) dx}. \quad (2.41)$$

ainda podemos reescrever a expressão em termo do fluxo magnético, descrito na equação 2.46

$$\Psi = \left[ \psi_{1,0} e^{\frac{ie}{\hbar c} \phi} + \psi_{2,0} \right] e^{\frac{ie}{\hbar c} \int_{x_2}^x A(x) dx}. \quad (2.42)$$

usando a equação (2.50), podemos escrever a densidade de probabilidade

$$P = |\Psi|^2 = \Psi \Psi^* = |\psi_{1,0}|^2 + |\psi_{2,0}|^2 + 2Re \left( \psi_{1,0}^* \psi_{2,0} e^{-\frac{ie}{\hbar c} \phi} \right). \quad (2.43)$$

Fazendo uma análise dos últimos cálculos ,temos que os dois primeiros termos corresponde a probabilidade da partícula percorrer uma região acima ou abaixo do solenoide e o terceiro está relacionado a medida no padrão de interferência que depende fluxo magnético.

Assim, conclui-se que o campo magnético pode influenciar na dinâmica das partículas carregadas embora não esteja definido na região onde as funções de onda estão, este resultado de interferência é puramente quânticos, já que classicamente, a dinâmica da partícula carregada depende da força de Lorentz, que é zero onde os campos são nulos. Desta maneira os potenciais vetores  $\mathbf{A}$  que antes eram considerados meras ferramentas matemáticas para facilitar as soluções dos cálculos dos campos eletromagnéticos, começam a ter significados físicos com a descoberta por Aharonov-Bohm [13].

## 2.5 Efeito Aharonov-bohm e espalhamento

Neste momento vamos obter uma solução exata para problema de espalhamento, considerando uma região onde o campo magnético tende a um raio zero, enquanto o fluxo total permanece constante, a equação de Schrodinger para a região externa ao campo é, em coordenadas cilíndricas [13]

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial}{r \partial r} + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} + i\alpha \right)^2 + k^2 \right] \psi = 0. \quad (2.44)$$

onde  $\mathbf{k}$  é o vetor de onda que está relacionado a energia da partícula incidente

$$|\mathbf{k}| = k = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2mE}. \quad (2.45)$$

sendo  $\alpha$  relacionado ao parâmetro de fluxo

$$\alpha = -\frac{e\phi}{c\hbar}. \quad (2.46)$$

temos feito uso dos seguintes calibre de Coulomb

$$A_r = 0 \quad ; \quad A_\theta = \frac{\phi}{2\pi r}. \quad (2.47)$$

A solução geral para a equação acima, é descrita por uma função do seguinte tipo

$$\psi = \sum_{m+\infty}^{\infty} e^{im\theta} [a_m J_{m+\alpha}(kr) + b_m J_{-(m+\alpha)}(kr)], \quad (2.48)$$

onde  $a_m$  e  $b_m$  são constantes arbitrárias e  $J_{(m+\alpha)}(kr)$  é uma função de Bessel, em geral de ordem fracionária (dependente de  $\phi$ ). A solução anterior possui solução apenas para  $r > R$ . Para  $R < r$  (região no inteiro do campo magnético) veja a seguinte referencia [20], ao combinar as soluções para  $r = R$  é verificado que apenas funções de Bessel de ordem positiva permanece, com  $R$  se aproximando de zero. No limite onde o raio tende para zero, a onda incidente funciona como uma única onda plana

$$\psi_{inc} = e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} = e^{-ikr \cos \theta}. \quad (2.49)$$

fazendo uso da seguinte transformação de calibre (2.27), podemos escrever a função de onda como

$$\psi = e^{-ik\rho \cos \theta} e^{\frac{ie}{c\hbar} \int_{x_0}^x A(x') dx'}. \quad (2.50)$$

agrupando a equação (2.49) e (2.50), a integral pode ser calculada

$$\int_{x_0}^x A(x')d(x') = \int_0^\theta A_\theta d(\theta) = \frac{\phi}{2\pi}\theta \quad (2.51)$$

e a função de onda assume a seguinte forma [21]

$$\psi = e^{-ikr \cos \theta} e^{-i\alpha\theta}. \quad (2.52)$$

Aharonov-Bohm observou que esta função de onda é a solução correta para o onda incidente [13].

A solução exata para um limite do raio R tendendo a zero, é mostrada como

$$\Psi = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-i)^{|m+\alpha|} J_{|m+\alpha|} e^{im\theta}. \quad (2.53)$$

a realização de Aharonov-Bohm foi a análise da função de onda  $\psi$ . Eles converteram a solução exata para uma forma mais acessível [13]

$$\Psi = e^{-i(\alpha\theta+kr \cos \theta)} + \frac{e^{ikr}}{\sqrt{2\pi i k r}} \sin \pi\alpha \frac{e^{-i\frac{\theta}{2}}}{\cos \frac{\theta}{2}}. \quad (2.54)$$

O primeiro termo da equação representa a onda incidente, e o segundo termo a onda espalhada. Neste momento, podemos identificar a amplitude de espalhamento  $f(\theta)$ .

$$f(\theta) = \frac{\sin \pi\alpha}{\sqrt{2\pi i}} \frac{e^{-i\frac{\theta}{2}}}{\cos \frac{\theta}{2}}. \quad (2.55)$$

A seção de choque diferencial, será o quadrado da amplitude de espalhamento  $f(\theta)$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2 = \frac{\sin^2 \pi\alpha}{2\pi} \frac{1}{\cos^2 \frac{\theta}{2}}. \quad (2.56)$$

expandindo para pequenos ângulos, ficamos

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{(\alpha\pi)^2}{2\pi} \frac{4}{(\theta - \pi)^2}. \quad (2.57)$$



# Capítulo 3

## Modelo análogo acústico ao Buraco Negro

Modelos Análogo desenvolvem um papel muito importante na ciência, sendo escolhido. O modelo o qual vamos descrever, trata do modelo análogo acústico para um buraco negro gravitacional. Esse modelo trata da utilização de ondas sonoras num fluido que se move como um análogo para ondas de luz em espaço-tempo curvo. No entanto existe muitos outros modelos análogos que podem ser úteis por vários motivos, por razões diversas, por exemplos, experimentais.

### 3.1 Hidrodinâmica do Fluido

Nesta seção iremos fazer uma revisão a respeito da hidrodinâmica necessária para a construção de modelo análogo a relatividade geral. O fluido considerado será ideal, está em movimento com sua velocidade descrita completamente por um campo escalar, e irrotacional para evitar vórtice, será barotrópico, isto é sua pressão será função apenas da densidade  $P(\rho)$ . Podemos descrever a dinâmica do fluido através de três equações [22], dadas a seguir

- Equação da continuidade

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (3.1)$$

- Equação de Euler

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \rho \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = \mathbf{F}. \quad (3.2)$$

onde a única força presente sendo aquela devido a pressão, além do potencial gravitacional newtoniano e um potencial externo qualquer, podemos descrever a força como sendo .

$$\mathbf{F} = -\nabla P - \rho \nabla \Phi. \quad (3.3)$$

onde que o  $\Phi$  descreve tanto um potencial newtoniano gravitacional quanto um potencial externo qualquer. Assim, a equação de Euler fica descrita da seguinte forma

$$\rho \left[ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = -\nabla P - \rho \nabla \Phi. \quad (3.4)$$

- Equação barotrópica

$$P = P(\rho). \quad (3.5)$$

onde  $\rho$  descreve a densidade do fluido,  $\mathbf{v}$  a velocidade,  $p$  a pressão. Temos que, o rotacional de um campo de velocidade é conhecido como vorticidade. ou seja :

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v}. \quad (3.6)$$

A equação de Euler 3.4 em termos da vorticidade, usando a seguinte identidade vetorial

$$\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega} = \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) = \frac{1}{2} \nabla \mathbf{v}^2 - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}. \quad (3.7)$$

é

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \left( \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 + \Phi \right) + \frac{\nabla p}{\rho} - \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega} = 0. \quad (3.8)$$

Consideramos fluxo irrotacional, isso nos leva de imediato a fazer  $w = 0$  na equação de vorticidade do fluido, em que existe uma função escalar  $\psi(t, x)$  , tal que :

$$\mathbf{v} = -\nabla \psi(t, x). \quad (3.9)$$

substituindo essa relação na equação (3.6), e impondo essas condições na equação de Euler, temos :

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \left( \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 + \Phi \right) + \frac{\nabla p}{\rho} = 0. \quad (3.10)$$

Sendo o fluido barotrópico, podemos usar a seguinte definição

$$\nabla h = \frac{\nabla p}{\rho}. \quad (3.11)$$

Daí a equação da Euler será :

$$-\frac{\partial\psi}{\partial t} + h + \frac{(\nabla\psi)^2}{2} + \Phi = 0. \quad (3.12)$$

Se houver uma mudança de pressão no fluido, conseqüentemente existe movimento das moléculas do fluido, as moléculas em movimento, por sua vez leva a uma mudança de densidade e na pressão. assim [23].

Agora linearizando as equações de movimento ,Equação 3.1, 3.4 e 3.5,e fazendo perturbações de primeira ordem em torno de alguma solução exata  $(\rho_0, p_0, \psi_0)$ , as equações são descrita por :

$$\rho = \rho_0 + \epsilon\rho_1 + 0(\epsilon^2), \quad (3.13)$$

$$p = p_0 + \epsilon p_1 + 0(\epsilon^2) \quad (3.14)$$

$$\psi = \psi_0 + \epsilon\psi_1 + 0(\epsilon^2). \quad (3.15)$$

Sendo o termo  $0(\epsilon^2)$  de segunda ordem, desprezados Fazendo uso destas na equação da continuidade,teremos dois pares de equação

$$\frac{\partial\rho_0}{\partial t} + \nabla(\rho_0 V_0) = 0. \quad (3.16)$$

e

$$\frac{\partial\rho_1}{\partial t} + \nabla(\rho_0 v_1 + \rho_1 v_0) = 0. \quad (3.17)$$

Agora, a condição barotrópica implica que

$$h(p) = h(p_0 + \epsilon p_1 + 0(\epsilon^2)) = h_0 + \epsilon \frac{h_1}{\rho_0} + 0(\epsilon^2) \quad (3.18)$$

com estes resultados, temos condições de linearizarmos a equação de Euler (3.11). Substituindo a condição barotrópica descrita pela a Equação (3.18) e as quantidades perturbadas dada pela a Equação (3.15). podemos escrever a equação de Euler, como sendo:

$$-\frac{\partial\psi_0}{\partial t} + h_0 + \frac{(\nabla\psi_0)^2}{2} + \Phi = 0. \quad (3.19)$$

$$-\frac{\partial\psi_1}{\partial t} + \frac{p_1}{\rho_0} - \mathbf{v}_0 \cdot \nabla\psi_1 = 0. \quad (3.20)$$

Sendo que esta última equação pode ser dada como :

$$p_1 = \rho_0 \left( \frac{\partial\psi_1}{\partial t} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla\psi_1 \right) \quad (3.21)$$

Agora, utilizaremos mais uma relação barotrópica :

$$\rho_1 = \frac{\partial \rho}{\partial p} p_1 = \frac{\partial \rho}{\partial p} \rho_0 \left( \frac{\partial \psi_1}{\partial t} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \psi_1 \right). \quad (3.22)$$

que substituindo o resultado da equação de Euler linearizada na equação da continuidade. Fazendo a substituição da Equação (3.22) na (3.17), obtemos a seguinte expressão:

$$-\frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial \rho}{\partial p} \rho_0 \left( \frac{\partial \psi_1}{\partial t} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \psi_1 \right) \right] + \nabla \cdot \left[ \rho_0 \nabla \psi_1 - \frac{\partial \rho}{\partial p} \rho_0 \mathbf{v}_0 \left( \frac{\partial \psi_1}{\partial t} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \psi_1 \right) \right] = 0. \quad (3.23)$$

Podemos usar o fato de que a velocidade local do som é definida como:

$$c^{-2} \equiv \frac{\partial \rho}{\partial p}. \quad (3.24)$$

$$-\frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\rho_0}{c^2} \left( \frac{\partial \psi_1}{\partial t} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \psi_1 \right) \right] + \nabla \cdot \left[ \rho_0 \nabla \psi_1 - \frac{\rho_0}{c^2} \mathbf{v}_0 \left( \frac{\partial \psi_1}{\partial t} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \psi_1 \right) \right] = 0 \quad (3.25)$$

Esta equação descreve a onda de propagação do potencial escalar linearizado  $\psi_1$ . A equação (3.21) determina  $P_1$ , e a Equação (3.22) determina a densidade  $\rho_1$ , esta equação de onda determina por completo a propagação da perturbação acústica .

## 3.2 A Métrica Acústica

Para determinar a métrica acústica escreve a Equação (3.25) como o produto de uma matriz  $4 \times 4$  ,ou seja:

$$\sqrt{g} g^{\mu\nu} \equiv \frac{\rho_0}{c} \begin{bmatrix} -1 & -v_x & -v_y & -v_z \\ -v_x & c^2 - v_x^2 & -v_x v_y & -v_x v_z \\ -v_y & -v_y v_x & c^2 - v_y^2 & -v_y v_z \\ -v_z & -v_z v_x & -v_z v_y & c^2 - v_z^2 \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

Com o objetivo de fazer uma analogia com a relatividade geral, faremos uso da notação usual para objeto definidos no espaço quadrimensional, e a Equação 3.25 de uma forma compacta,é descrita por

$$\partial_\mu (f^{\mu\nu} \partial_\nu \psi_1) = 0. \quad (3.27)$$

onde  $f^{\mu\nu}$  representa as componentes da matriz  $4 \times 4$  da Equação (3.26).

$$f^{\mu\nu}(t, \mathbf{x}) \equiv \frac{\rho_0}{c^2} \begin{bmatrix} -1 & \vdots & -v_0^j \\ \dots\dots\dots & . & \dots\dots\dots \\ -v_0^i & \vdots & (c^2\delta^{ij} - v_0^i v_0^j). \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

d'Alembertino no espaço-tempo curvo [18] é definido como :

$$\Delta\psi \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\psi) \quad (3.29)$$

no qual  $g^{\mu\nu}$  é a inversa da métrica do espaço-tempo e  $g$  é seu determinante  $g \equiv \det(g_{\mu\nu})$ . Desta forma, reescrever-se a Equação (3.25) em termos do d'Alembertiano ,usando a seguinte identidade

$$\sqrt{-g}g^{\mu\nu} = f^{\mu\nu}. \quad (3.30)$$

que implica,por um lado em

$$\det(f^{\mu\nu}) = (\sqrt{-g})^4 g^{-1} = g. \quad (3.31)$$

por outro lado, encontramos que :

$$\det(f^{\mu\nu}) = \left(\frac{\rho_0}{c^2}\right)^4 \cdot [(-1)(c^2 - v_0^2) - (v_0)^2] = -\frac{\rho_0^4}{c^2}. \quad (3.32)$$

Conseqüentemente, igualando as equações (3.31) e (3.32), obtemos

$$g = -\frac{\rho_0^4}{c^2}; \quad \sqrt{-g} = \frac{\rho_0^2}{c}. \quad (3.33)$$

os coeficientes da métrica acústica inversa são :

$$g^{\mu\nu}(t, \mathbf{x}) \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}}f^{\mu\nu}(t, \mathbf{x}). \quad (3.34)$$

assim, a métrica acústica inversa correspondente é :

$$g^{\mu\nu}(t, \mathbf{x}) \equiv \frac{1}{\rho_0 c} \begin{bmatrix} -1 & \vdots & -v_0^j \\ \dots\dots\dots & . & \dots\dots\dots \\ -v_0^i & \vdots & (c^2\delta^{ij} - v_0^i v_0^j). \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

Nos não podemos determinar a própria métrica simplesmente invertendo essa, sendo assim, vamos mostrar como obter a métrica  $g_{\mu\nu}(t, \mathbf{x})$ . partindo da seguinte relação :

$$f^{\mu\nu}(t, \mathbf{x}) = \sqrt{-g}g^{\mu\nu} \quad \implies \quad f_{\mu\nu}(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{-g}}g_{\mu\nu}(t, \mathbf{x}). \quad (3.36)$$

e aplicando o determinante :

$$\det(f_{\mu\nu}) = \det\left(\frac{1}{\sqrt{-g}}g_{\mu\nu}\right) = \frac{1}{g}. \quad (3.37)$$

temos

$$g = \frac{1}{\det(f_{\mu\nu})}. \quad (3.38)$$

Retornando a Equação (3.36), a relação explícita para o  $g_{\mu\nu}$

$$g_{\mu\nu}(t, \mathbf{x}) = \sqrt{-g}f_{\mu\nu}(t, \mathbf{x}). \quad (3.39)$$

E a métrica acústica é descrita como sendo:

$$g_{\mu\nu}(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{\det(f_{\mu\nu})}}f_{\mu\nu}(t, \mathbf{x}). \quad (3.40)$$

Ou ainda ,

$$g_{\mu\nu}(t, \mathbf{x}) \equiv \frac{\rho_0}{c} \begin{bmatrix} -(c^2 - v_0^i v_0^j) & \vdots & -v_0^j \\ \dots\dots\dots & . & \dots\dots\dots \\ -v_0^i & \vdots & \delta_{ij}. \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

o elemento de linha acústico

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu. \quad (3.42)$$

$$ds^2 = \frac{\rho_0}{c} [-c^2 dt^2 + (dx^i - v_0^i dt)\delta_{ij}(dx^j - v_0^j dt)]. \quad (3.43)$$

Para a métrica acústica temos as seguintes considerações:

- $(-, +, +, +)$  , é exatamente como deve ser em uma geometria Lorentziana
- herda a geometria e a topologia do espaço-tempo de Minkowski .
- Na relatividade geral a métrica está relacionado com a distribuição de matéria no espaço-tempo, enquanto a métrica acústica descreve uma distribuição de velocidade do fluido .

### 3.3 Geometria de Vórtice

Como exemplo de um fluxo de um fluido em que a distinção entre a ergosfera e horizonte de evento acústico é considerado crítico temos a "Banheira de Drenagem". Para iniciarmos vamos considerar que estamos tratando de um fluxo estacionário bidimensional  $(2 + 1)$  com simetria axial, para melhor descrever o fluxo, usaremos coordenadas polares  $(t, r, \theta)$ . A equação da continuidade (3.1) será reescrita da seguinte forma [24][25],[26].

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = \partial_t \rho + \frac{1}{r} \partial_r (r \rho v^r) + \frac{1}{r} \partial_\theta (\rho v^\theta) = 0. \quad (3.44)$$

Verifica-se que a componente da velocidade do fluxo na parte radial é :

$$\rho v^r \propto \frac{1}{r}. \quad (3.45)$$

Na direção tangente, tem-se a exigência de que o fluxo tenha vorticidade nula  $(\nabla \times v = 0)$ , fazendo uso do teorema de Stokes encontramos a componente tangencial para a velocidade do fluxo é :

$$v^\theta \propto \frac{1}{r}. \quad (3.46)$$

o potencial velocidade de fundo é descrito por :

$$\psi(r, \theta) = -D \ln \left( \frac{r}{a} \right) - C(\theta). \quad (3.47)$$

sendo a velocidade do fluido descrita da seguinte forma :

$$\mathbf{v} = -\nabla \psi. \quad (3.48)$$

Aplicando a Equação (3.47) na Equação (3.48), obtemos a expressão para a velocidade do fluido como sendo :

$$\mathbf{v} = \frac{D \hat{r} + C \hat{\theta}}{r}. \quad (3.49)$$

O elemento de linha acústico da Equação (3.43), ou seja na métrica acústica, tem-se que :

$$ds^2 = \frac{\rho_0}{c_s} [-(c_s^2 - v_0^2) dt^2 - 2 \mathbf{v}_0 dx_i dt + dx_i^2]. \quad (3.50)$$

aplicando a velocidade do fluido encontrada na Equação (3.49), obtemos a métrica acústica para a banheira de drenagem:

$$ds^2 = \frac{\rho_0}{c_s} \left[ -c_s^2 dt^2 + \left( dr - \frac{D dt}{r} \right)^2 + \left( r d\theta - \frac{C dt}{r} \right)^2 + dz^2 \right]. \quad (3.51)$$

ou equivalentemente :

$$ds^2 = \frac{\rho_0}{c_s^2} \left[ -f \left( dt - \frac{D}{rf} dr \right)^2 + f^{-1} dr^2 + \left( r d\theta - \frac{C}{r} dt \right)^2 \right]. \quad (3.52)$$

Onde o  $f = c_s^2 - \frac{D^2}{r^2}$ , fazendo uma mudança de coordenada do seguinte tipo

$$d\tau = dt - \frac{D}{rf} dr \quad (3.53)$$

e substituindo na equação (3.52), encontraremos que :

$$ds^2 = \frac{\rho_0}{c_s^2} \left[ -f (d\tau)^2 + f^{-1} dr^2 + \left( r(d\theta - \frac{DC}{r^3 f} dr) - \frac{C}{r} d\tau \right)^2 \right]. \quad (3.54)$$

assim, conseguimos identificar a nova coordenada como sendo :

$$d\Theta = d\theta - \frac{CD}{r^3 f} dr. \quad (3.55)$$

Agora, podemos reescrever o elemento de linha em termos das novas coordenadas como :

$$ds^2 = \frac{\rho_0}{c_s} \left[ -f d\tau^2 + f^{-1} dr^2 + \left( r d\Theta - \frac{C}{r} d\tau \right)^2 \right]. \quad (3.56)$$

ou

$$ds^2 = \frac{\rho_0}{c_s} \left[ -\left(f - \frac{C^2}{r^2}\right) d\tau^2 + f^{-1} dr^2 + r^2 d\Theta^2 - 2C d\Theta d\tau \right]. \quad (3.57)$$

Do elemento de linha acústico, podemos extrair os conceitos relacionados a ergo-regiões e horizontes de eventos acústico .

Inicialmente vamos começar com a ideia de ergo-regiões. Para isso, seja o vetor de Killing  $K^\mu = (1, 0, 0, 0)$ , à medida que :

$$g_{\mu\nu} K^\mu K^\nu = g_{tt} = -(c_s^2 - v^2). \quad (3.58)$$

Esta quantidade muda de sinal quando  $|v| > c$ . Assim, qualquer região supersônica será uma ergo-região. A fronteira da ergo-região, encontra-se quando  $(v^2 - c^2 = 0)$ , é um círculo de raio (Figura 3.1) :

$$r = \frac{\sqrt{D^2 + C^2}}{c}. \quad (3.59)$$

O horizonte de evento acústico é estabelecido pela a superfície que delimita a região na qual a geodésica são nulas (os fônos) não podem escapar, isto separa a regiões em



subnônica e supersônica. Temos que o raio do horizonte de eventos acústicos situa-se quando igualado a velocidade do som a componente da velocidade radial do fluxo. Do elemento de linha acústico, Equação 3.57, percebe-se que

$$r_h = \frac{|D|}{c_s}. \quad (3.60)$$

Podemos fazer a representação do modelo análogo ao buraco negro, usando um tubo

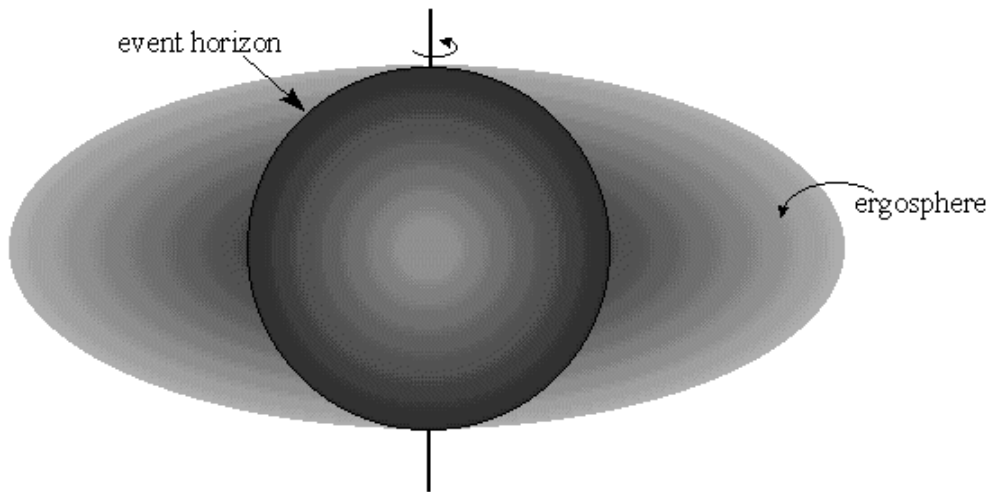


Figura 3.1: Ergor-região e Horizonte de evento

em que passará um quantidade de onda de fluxo, será dividido em duas regiões o quais é conhecido por subsônico e supersônico (Figura 3.2). Região subsônica é conhecida por ser o território onde a velocidade do som é maior que a velocidade do fluxo,  $c_s > v$ . Supersônica é onde a velocidade do fluxo é dominante  $v > c_s$ . Ao entrar na região supersônica ocorre algo interessante, o som nesta poderá entrar a todo momento mas, não será capaz de sair da mesma, assim essa construção age como o modelo análogo ao buraco negro.

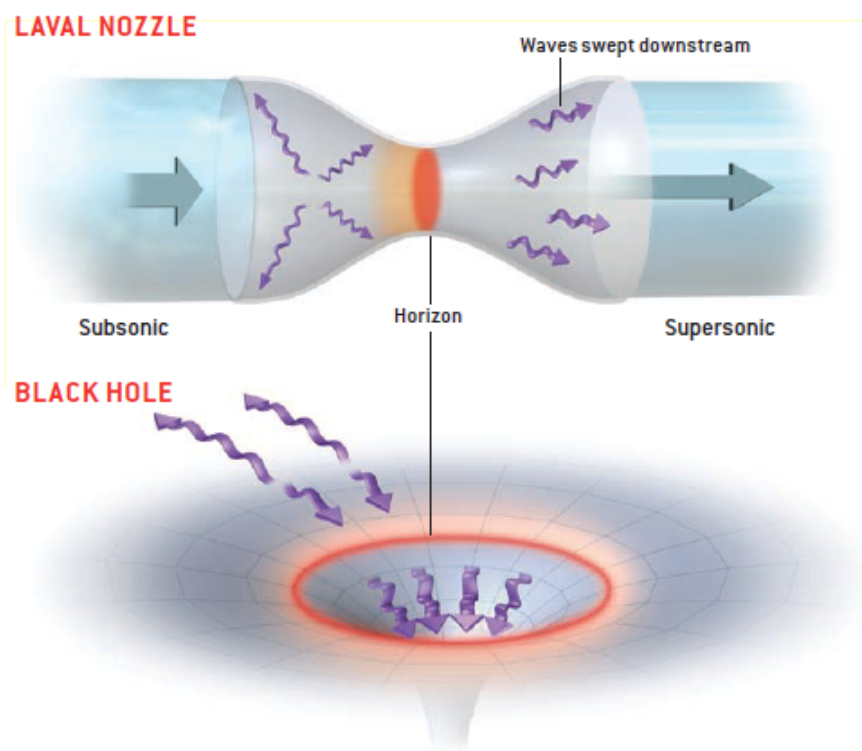


Figura 3.2: Buraco Negro Análogo

# Capítulo 4

## Efeito Aharonov-Bohm Análogo

### 4.1 Banheira de Drenagem e Vórtice

A partir das equações fundamentais do fluido W.G.Unruh [27] demonstrou que ondas sonoras propagando em um fluido barotrópico e com fluxo irrotacional é descrito por um campo escalar obedecendo a equação de Klein-Gordon em um espaço tempo curvo, por :

$$\square\psi = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_\mu \left( \sqrt{|g|}g^{\mu\nu}\partial_\nu\psi \right) = 0. \quad (4.1)$$

onde o termo  $g_{\mu\nu}$  é sua métrica efetiva ( $g^{\mu\nu}$  é sua inversa) e  $g \equiv \det(g_{\mu\nu})$ , sendo o determinante dependendo apenas das propriedades locais do fluido e não da equação de Einstein. Como desenvolvido no capítulo anterior, temos que o elemento de linha acústico para a banheira de drenagem é descrito por :

$$ds^2 = c_s^2 dt^2 - \left( dr + \frac{Ddt}{r} \right)^2 - \left( rd\phi - \frac{Cdt}{r} \right)^2. \quad (4.2)$$

sendo  $C$  e  $D$  constantes relacionada a taxa de circulação e drenagem do fluido respectivamente. Como feito no capítulo anterior, podemos descrever o elemento de linha em termos de novas coordenadas :

$$ds^2 = f(r)d\tau^2 - f(r)^{-1}dr^2 - \left( rd\Phi - \frac{C}{r}d\tau \right)^2. \quad (4.3)$$

sendo  $d\tau$ ,  $d\Phi$  e  $f$  dados por

$$d\tau = dt - \frac{D}{rf}dr, \quad (4.4)$$

$$d\Phi = d\phi - \frac{CD}{r^3 f} dr \quad (4.5)$$

e

$$f = c_s^2 - \frac{D^2}{r^2}. \quad (4.6)$$

Com o elemento de linha conhecido nas novas coordenadas, podemos extrair a métrica ( $g_{\mu\nu}$ ), que é representada por uma matriz  $3 \times 3$ , pois estamos trabalhando em um espaço  $(2 + 1)$ . Assim, a métrica acústica é :

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} f - \frac{c^2}{r^2} & 0 & -c \\ 0 & -f^{-1} & 0 \\ -c & 0 & -r^2 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

e a métrica inversa

$$\sqrt{g}g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \frac{1}{f} & 0 & \frac{c}{fr} \\ 0 & -f & 0 \\ \frac{c}{fr} & 0 & \frac{-(1 - \frac{c^2}{r^2} - \frac{d^2}{r^2})}{f} \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

Com a métrica acústica inversa para a banheira de drenagem, podemos fazer uso da equação de Klein-Gordon para obtermos uma equação diferencial tipo Schrodinger. Vamos considerar uma função  $\psi(t, r, \phi)$  e , com separação de variáveis, temos:

$$\psi(t, r, \phi) = R(r)e^{i(\omega t - m\phi)}. \quad (4.9)$$

Através da equação de Klein-Gordon temos que alguns termos que são zeros de acordo com a métrica 4.8, assim, podemos apresentar a seguinte expressão .

$$\sqrt{g}g^{tt}\partial_t^2\psi + \sqrt{g}g^{\phi t}\partial_\phi(\partial_t\psi) + \sqrt{g}g^{t\phi}\partial_t(\partial_\phi\psi) + \partial_r(\sqrt{g}g^{rr}\partial_r\psi) + \sqrt{g}g^{\phi\phi}\partial_\phi^2\psi = 0. \quad (4.10)$$

Podemos identificar suas componentes e fazer a substituição na equação acima . Os valores das derivadas para a função  $\psi(t, r, \phi)$  :

$$\Delta\psi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2} \quad (4.11)$$

são:

- $\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -w^2 R(r) e^{i(wt-m\phi)}$
- $\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{R(r)m^2}{r^2} e^{i(wt-m\phi)}$
- $\partial_r(\sqrt{g} g^{rr} \psi) = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r f \frac{dR(r)}{dr} e^{i(wt-m\phi)} \right)$
- $\frac{\partial}{\partial \phi} \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) = -\frac{mwR(r)}{r^2} e^{i(wt-m\phi)}$
- $\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \right) = -\frac{mwR(r)}{r^2} e^{i(wt-m\phi)}$

Fazendo a substituição das derivadas encontradas na Equação 4.10 , juntamente com os termos da inversa da métrica 4.8, encontramos a seguinte equação :

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r f \frac{dR(r)}{dr} \right] + \left[ -\frac{w^2}{f} + \frac{2cmw}{fr^2} + \frac{m^2}{r^2 f} - \frac{c^2 m^2}{fr^4} \right] R(r) = 0. \quad (4.12)$$

Agora, consideraremos uma nova função radial descrita pela a seguinte transformação :

$$G(r_*) = \sqrt{r} R(r). \quad (4.13)$$

Levando a transformação na Equação (4.12) e multiplicando por um fator  $f$ , encontramos uma equação em termo da nova função  $G(r_*)$  :

$$-\frac{f}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r f \frac{d}{dr} \left( \frac{G(r_*)}{\sqrt{r}} \right) \right] + \left[ -w^2 + \frac{2cmw}{r^2} + \frac{m^2}{r^2} - \frac{c^2 m^2}{r^4} \right] \frac{G(r_*)}{\sqrt{r}} = 0. \quad (4.14)$$

Ainda não temos a derivada para o primeiro termo da equação acima.

Fazendo essa derivação, encontramos depois de algumas operações algébricas o seguinte :

$$\begin{aligned} -\frac{f}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r f \frac{d}{dr} \left( \frac{G(r_*)}{\sqrt{r}} \right) \right] &= \left[ -\frac{f^2}{\sqrt{r}} \frac{d^2 G(r_*)}{dr^2} - \frac{f 2D^2}{r^3 \sqrt{r}} \frac{dG(r_*)}{dr} \right. \\ &\quad \left. - \frac{f^2 G(r_*)}{4r^2 \sqrt{r}} + \frac{f D^2 G(r_*)}{r^4 \sqrt{r}} \right] \end{aligned} \quad (4.15)$$

Substituindo a Equação 4.15 em 4.14, obtemos

$$\begin{aligned} &\left[ -\frac{f^2}{\sqrt{r}} \frac{d^2 G(r_*)}{dr^2} - \frac{f 2D^2}{r^3 \sqrt{r}} \frac{dG(r_*)}{dr} - \frac{f^2 G(r_*)}{4r^2 \sqrt{r}} + \frac{f D^2 G(r_*)}{r^4 \sqrt{r}} - \frac{w^2 G(r_*)}{\sqrt{r}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2cmw G(r_*)}{r^2 \sqrt{r}} - \frac{c^2 m^2 G(r_*)}{\sqrt{r}} - \frac{m^2 D^2 G(r_*)}{r^2 \sqrt{r}} + \frac{m^2}{r^2} \right] = 0. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Para simplificar essa equação, faremos uma multiplicação pelo o fator de  $\sqrt{r}$  e, ao reorganizarmos os termos teremos a seguinte expressão :

$$\left[ -f^2 \frac{d^2}{dr^2} - \frac{f2D^2}{r^3} \frac{d}{dr} - \frac{f^2}{4r^2} + \frac{fD^2}{r^4} - w^2 + \frac{2cmw}{r^2} - \frac{c^2m^2}{r^4} - \frac{m^2D^2}{r^4} + \frac{m^2}{r^2} \right] G(r_*) = 0. \quad (4.17)$$

Para eliminar o termo de derivada primeira, para isso vamos introduzir uma mudança de coordenada descrita pela a seguinte equação :

$$\frac{d}{dr_*} = f \frac{d}{dr}. \quad (4.18)$$

onde

$$f = 1 - \frac{D^2}{r^2}. \quad (4.19)$$

Fazendo a seguinte transformação, encontramos :

$$\frac{d^2}{dr^2} = \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{f} \frac{d}{dr_*} \right) = \frac{2D^2}{r^3 f^2} \frac{d}{dr_*} + \frac{1}{f^2} \frac{d^2}{dr_*^2}. \quad (4.20)$$

Inserindo a Equação 4.20 em 4.17, podemos eliminar o termo de derivada primeira e obtemos uma equação tipo Schrodinger :

$$\left[ \frac{d^2}{dr_*^2} + \left( w - \frac{cm}{r^2} \right)^2 - V(r) \right] G(r_*) = 0. \quad (4.21)$$

com o potencial escrito por :

$$V(r) = f(r) \left( \frac{m^2 - \frac{1}{4}}{r^2} + \frac{5D^2}{4r^4} \right) \quad (4.22)$$

No entanto ,esta equação, está descrita por duas coordenadas  $(r, r_*)$ , com o objetivo de deixarmos em uma única coordenada, faremos uso mais uma vez da seguinte

transformação :

$$X(r) = \sqrt{f}G(r_*). \quad (4.23)$$

Substituindo esta na equação 4.23 na 4.25 encontraremos que :

$$\left[ \frac{d^2}{dr_*^2} + \left( w - \frac{cm}{r^2} \right)^2 - V(r) \right] \frac{X(r)}{\sqrt{f}} = 0. \quad (4.24)$$

Por mais uma vez usaremos a transformação de coordenada descrita pela a Equação (4.18), procedendo de forma semelhante como a anterior, encontramos a seguinte expressão:

$$\frac{d^2}{dr_*^2} = f^{\frac{3}{2}} \frac{d^2 X(r)}{dr^2} + f^{-\frac{1}{2}} \frac{D^4 X(r)}{r^6} + f^{\frac{1}{2}} \frac{3D^2 X(r)}{r^4}. \quad (4.25)$$

Substituindo essa derivação em 4.25 em 4.27, teremos que :

$$\left[ f^{\frac{3}{2}} \frac{d^2 X(r)}{dr^2} + f^{-\frac{1}{2}} \frac{D^4 X(r)}{r^6} + f^{\frac{1}{2}} \frac{3D^2 X(r)}{r^4} \right] X(r) + \left[ \left( w - \frac{cm}{r^2} \right)^2 - V(r) \right] \frac{X(r)}{\sqrt{f}}. \quad (4.26)$$

Para deixarmos com uma equação tipo Schrodinger, faremos uma multiplicação pelo o seguinte termo  $f^{-\frac{3}{2}}$  , com isso, teremos a seguinte equação:

$$\frac{d^2 X(r)}{dr^2} + \left( \frac{3D^2}{fr^4} + \frac{D^4}{f^2 r^6} \right) X(r) + \left[ \left( w - \frac{cm}{r^2} \right)^2 - V(r) \right] \frac{X(r)}{f^2} = 0. \quad (4.27)$$

Fazendo a expansão do  $f$  em uma série de potencia  $1/r$  , sendo o  $f = 1 - \frac{D^2}{r^2}$  encontramos que :

$$f^{-1} = 1 + \frac{D^2}{c^2} + \frac{D^4}{r^4}. \quad (4.28)$$

e

$$f^{-2} = 1 + \frac{2D^2}{r^2} + \frac{3D^4}{r^4}. \quad (4.29)$$

Substituiremos a expansões correspondes a  $f$  na equação (4.27),e obtemos que:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 X(r)}{dr^2} + \left[ w^2 + \frac{2w^2 D^2}{r^2} - \frac{2Cmw}{r^2} - \frac{m^2 + 1/4}{r^2} - \frac{5D^2}{4r^4} + \frac{3D^2}{r^4} + \frac{3w^2 D^4}{r^4} \right. \\ \left. - \frac{4CmwD^2}{r^4} + \frac{C^2 m^2}{r^4} - \frac{m^2 D^2}{r^4} + \frac{D^4}{4r^4} + \frac{3D^4}{r^6} + \frac{D^4}{4r^6} - \frac{6cmwD^4}{r^6} \right. \\ \left. + \frac{2C^2 m^2 D^2}{r^6} - \frac{5D^4}{4r^6} + \frac{m^2 D^4}{r^6} + \frac{D^4}{r^6} + \mathcal{O}(w^{-6} r^{-8}) \right] X(r) = 0. \end{aligned} \quad (4.30)$$

As constantes C e D estão relacionadas a circulação e drenagem do fluxo de fluido para uma banheira de drenagem, podemos relacionar estas constantes com o efeito de espalhamento de uma onda monocromática com frequência  $w$ , através da seguinte relação de acoplamento:

$$a = \frac{wC}{c_s}. \quad (4.31)$$

$$b = \frac{wD}{c_c}. \quad (4.32)$$

Sendo  $c_s$  é a velocidade do som, consideraremos  $c_s = 1$  e as Equações (4.31) e (4.32) na equação (4.30), após algumas manipulações chegamos a seguinte equação tipo Schordinger reescrita em termos das quantidades a,b e  $w$ :

$$\frac{d^2 X(r)}{dr^2} + \left[ w^2 - \frac{\tilde{m}^2 + 1/4}{r^2} + U(r) \right] X(r) = 0. \quad (4.33)$$

Onde

$$\tilde{m}^2 = m^2 - 2b^2 + 2am. \quad (4.34)$$

O potencial  $U(r)$  é :

$$U(r) = \frac{(a^2 - b^2)m^2 + 3b^4 + 2b^2 - 4amb^2}{w^2 r^4} + \frac{b^2(2a^2 - b^2)m^2 - 6b^4 am + 3b^4}{w^4 r^6}. \quad (4.35)$$



## 4.2 Análogo ao Efeito Aharonov-Bohm

Vamos considerar o espalhamento de uma onda plana monocromática com frequência  $w$ , da seguinte forma [28]

$$\psi(t, r, \phi) = e^{-iwt} \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_m(r) e^{im\phi} / \sqrt{r}. \quad (4.36)$$

de tal modo que, longe do vórtice,  $\psi$  seja descrito pela soma de uma onda plana e uma onda espalhada :

$$\psi(t, e, \phi) \sim e^{-iwt} (e^{iwx} + f_w(\phi) e^{iwr} / \sqrt{r}). \quad (4.37)$$

Com  $e^{iwx} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m J_m(wr) e^{im\phi}$ , onde  $j_m(\cdot)$  é uma função de Bessel de primeiro tipo . A amplitude de espalhamento  $f_w(\phi)$  pode ser representada por:

$$f_w(\phi) = \left( \frac{1}{2i\pi w} \right)^{1/2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (e^{2i\delta_m} - 1) e^{im\phi}. \quad (4.38)$$

a diferença de fase  $\delta_m$  é encontrada através da formula de aproximação, dada por :

$$\delta_m \simeq \frac{\pi}{2} (m - \tilde{m}) + \frac{\pi}{2} \int_0^{\infty} r [J_{\tilde{m}}(wr)]^2 U(r) dr. \quad (4.39)$$

Para a solução da diferença de fase, é necessário conhecer o valor do  $\tilde{m}$  e do potencial  $U(r)$ , toda a informação necessária para encontrarmos a diferença de fase já nos é conhecido, ou seja:

$$U(r) = \frac{(a^2 - b^2)m^2 + 3b^4 + 2b^2 - 4amb^2}{w^2 r^4} + \frac{b^2(2a^2 - b^2)m^2 - 6b^4 am + 3b^4}{w^4 r^6}. \quad (4.40)$$

e

$$\tilde{m}^2 = m^2 - 2b^2 + 2am \Rightarrow \tilde{m} = (m^2 - 2b^2 + 2am)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.41)$$

Assim, podemos encontrar a diferença de fase  $\delta_m$ , como:

$$\delta_m \simeq -\frac{a\pi m}{2|m|} + \frac{3\pi(a^2 + b^2)}{8|m|} - \frac{5a\pi(a^2 + b^2)m}{8m^2|m|}. \quad (4.42)$$

Este resultado é válido para  $|m| \gg \sqrt{a^2 + b^2}$ . O primeiro termo da equação 4.42, acarreta que a diferença de fase tende a uma constante diferente de zero no limite de  $m \pm \infty$ , que leva direto ao efeito Aharonov-Bohm [25]. O efeito Araronov-Bohm dominante no espalhamento de ondas de baixa frequência  $|w|\sqrt{C^2 + D^2} \ll 1$ , apenas os termos proporcional a  $a$  serão considerados, enquanto termos seguintes de ordem  $(a^2 + b^2)$  serão desprezados.

$$\delta_m \simeq -\frac{\alpha\pi m}{2|m|}. \quad (4.43)$$

Encontrada a diferença de fase  $\delta_m$ , adicionamos na amplitude de espalhamento representada pela a seguinte Equação 4.38. A secção de choque diferencial, será o quadrado da amplitude de espalhamento  $f_w(\phi)$ :

$$\frac{d\sigma}{d\phi} = |f_w(\phi)|^2. \quad (4.44)$$

Com

$$\frac{d\sigma_{ab}}{d\phi} = |f_w(\phi)|^2 \simeq \frac{1}{2\pi w} \left[ \sum_{m=-\infty}^{\infty} (e^{2i\delta_m} - 1)e^{im\phi} \right] \left[ \sum_{m'=-\infty}^{\infty} (e^{-2i\delta_{m'}} - 1)e^{-im'\phi} \right] \quad (4.45)$$

Utilizando o software matemático (Wolfram Mathematica 8) para fazer um expansão para valores pequenos de  $a$  e  $b$ , computamos o seguinte resultado :

$$\frac{d\sigma_{ab}}{d\phi} = |f_w(\phi)|^2 \simeq \frac{\pi}{2w} \frac{[a \cos(\phi/2) - b \sin(\phi/2)]^2}{\sin^2(\phi/2)}. \quad (4.46)$$

No limite de não drenagem  $b = 0$ , isto reduz para o resultado do vórtice de Fetter [25]:

$$\frac{d\sigma_a}{d\phi} = \frac{\pi\alpha^2}{2w} \cot^2(\phi/2). \quad (4.47)$$

Este se assemelha ao resultado exato para o efeito Aharonov-Bohm [13], ou seja:

$$\frac{d\sigma_{AB}}{d\phi} = \frac{\alpha^2}{2\pi w} \frac{4}{\phi^2}. \quad (4.48)$$

### 4.3 Modelo de Violação-Lorentz

A partir de agora, vamos desenvolver a nossa pesquisa fazendo uso de extensão do modelo abeliano modificado seu setor escalar com um termo de Lorentz, em que sua densidade lagrangiana é descrita por

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + |D_\nu\psi|^2 + m^2|\phi^2| - b|\psi^4| + K^{\mu\nu}D_\mu\psi^*D_\nu\psi. \quad (4.49)$$

Para o desenvolvimento deste trabalho, estamos interessados exclusivamente no termo escalar e na quebra de Lorentz. Sendo todos os demais termos desconsiderados, assim nossa densidade lagrangeana será dada por:

$$\mathcal{L} = |D_\nu\psi|^2 + K^{\mu\nu}D_\mu\psi^*D_\nu\psi. \quad (4.50)$$

Em que a derivada covariante é representada  $D_\mu = \partial_\mu$  e  $K^{\mu\nu}$  é um tensor constante relacionado ao termo de quebra de simetria de Lorentz. Podemos reescrever a densidade lagrangiana dada pela Equação (4.50), como sendo :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi g^{\mu\nu}\partial_\nu\psi + \frac{1}{2}K^{\mu\nu}D_\mu\phi^*D_\nu\psi. \quad (4.51)$$

Onde  $g^{\mu\nu}$  é a inversa do tensor métrico que já é conhecido e descrito pela seguinte equação matricial (4.8) e  $K^{\mu\nu}$  representa o tensor do termo de quebra de violação de simetria, onde  $K_{20} = K_{02} = \alpha$  e o restante será considerado zero :

$$K_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.52)$$

Para obter a equação de movimento, aplica-se o princípio de Hamilton, que conduz a equação de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\right) = 0. \quad (4.53)$$

Aplicando então a Equação (4.53) sobre a lagrangiana e Equação(4.51), obtemos a seguinte equação de movimento :

$$\partial_\mu [g^{\mu\nu}\partial_\nu + K^{\mu\sigma}\partial_\sigma]\Psi = 0. \quad (4.54)$$

Podemos reescrever como segue :

$$\left[ g^{tt} \partial_t^2 + 2g^{\phi t} \partial_\phi \partial_t + \partial_r (g^{rr} \partial_r) + 2K_{t\phi} \partial_t \partial_\phi + g^{\phi\phi} \partial_\phi^2 \right] \Psi = 0. \quad (4.55)$$

sendo a função  $\Psi(t, r, \phi)$ , descrita por:

$$\Psi(t, r, \phi) = R(r) e^{i(wt - m\phi)}. \quad (4.56)$$

Fazendo as derivas na função  $\Psi(t, r, \phi)$ , substituindo o representante do tensor métrico  $g^{\mu\nu}$  descrito na equação (4.8), e relacionado a quebra de simetria de Lorentz  $K_{\mu\nu}$  na Equação (4.52), encontramos a seguinte equação :

$$\left[ -\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r f \frac{d}{dr} \right) - \frac{w^2}{f} - \frac{2Cmw}{fr^2} - \frac{2\alpha mw}{r^2} + \left( \frac{m^2}{fr^2} - \frac{c^2 m^2}{fr^4} - \frac{D^2 m^2}{fr^4} \right) \right] = 0. \quad (4.57)$$

Com finalidade de obter resultados semelhantes ao descrito na seção 4.1, multiplicamos a Equação (4.57) por  $f$  e reorganizando os termos, obtém :

$$\left[ -f \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r f \frac{d}{dr} \right) - w^2 - \frac{2Cmw}{r^2} - f \frac{2\alpha mw}{r^2} + \left( \frac{m^2}{r^2} - \frac{c^2 m^2}{r^4} - \frac{D^2 m^2}{r^4} \right) \right] = 0. \quad (4.58)$$

Agora fazemos uma mudança de coordenada representada por:

$$G(r_*) = R(r) \sqrt{r}, \quad (4.59)$$

obtemos que :

$$\begin{aligned} & -\frac{f}{r} \frac{d}{dr} \left[ r f \frac{d}{dr} \left( \frac{G(r_*)}{\sqrt{r}} \right) \right] + \left[ -w^2 - f \frac{2\alpha mw}{r^2} - \frac{2Cmw}{r^2} \right. \\ & \left. + \left( \frac{m^2}{r^2} - \frac{c^2 m^2}{r^4} - \frac{d^2 m^2}{r^4} \right) \right] \frac{G(r_*)}{\sqrt{r}} = 0. \end{aligned} \quad (4.60)$$

as derivadas correspondentes é dada pela a seguinte forma

$$-\frac{f}{r} \frac{d}{dr} \left[ r f \frac{d}{dr} \left( \frac{G(r_*)}{\sqrt{r}} \right) \right] = \frac{f^2}{\sqrt{r}} \frac{d^2 G(r_*)}{dr^2} - \frac{f 2D^2}{\sqrt{r} r^3} \frac{dG(r_*)}{dr} - \frac{f^2 G(r_*)}{4r^2 \sqrt{r}} + \frac{f D^2 G(r_*)}{r^4 \sqrt{r}} \quad (4.61)$$

Aplicando as Equação(4.61) e (4.60) na Equação (4.58), encontramos que :

$$\left[ -f^2 \frac{d^2}{dr^2} - \frac{f 2D^2 d}{r^3 dr} \right] G(r_*) + \left[ \frac{m^2}{r^2} - \frac{C^2 m^2}{r^4} - \frac{D^2 m^2}{r^4} - \frac{f^2}{4r^2} + \frac{f D^2}{r^4} - w^2 - f \frac{2\alpha m w}{r^2} - \frac{2C m w}{r^2} \right] G(r_*) = 0. \quad (4.62)$$

Novamente é útil usar uma transformação de coordenada. Essa transformação é necessária para eliminarmos o termo que corresponde a deriva primeira, e assim, encontramos uma equação que é possível fazer uma analogia com a equação de Schordinger, a mudança de coordenada é descrita por :

$$\frac{d}{dr_*} = f \frac{d}{dr}. \quad (4.63)$$

De onde, obtemos a seguinte expressão :

$$\left[ \frac{d^2}{dr_*^2} + \left( w - \frac{cm}{r^2} \right)^2 + f \frac{2\alpha m w}{r^2} + V(r) \right] G(r_*) = 0. \quad (4.64)$$

Onde  $V(r)$  é :

$$V(r) = -f \left[ \frac{m^2 - 1/4}{r^2} - \frac{5D^2}{4r^2} \right]. \quad (4.65)$$

Trata-se de uma equação diferencial que depende das coordenadas  $(r, r_*)$ . Para eliminarmos uma das coordenadas, faz-se necessário novamente o uso de uma transformação do seguinte tipo :

$$X(r) = G(r_*) \sqrt{f}. \quad (4.66)$$

Daí as Equação (4.66) em (4.64) pode ser dada por :

$$\frac{d^2 X(r)}{dr^2} + \left( \frac{D^2}{f^2 r^6} + \frac{3D^2}{f r^4} \right) X(r) + \frac{2\alpha m w}{f r^2} + \left[ \left( w - \frac{Cm}{r^2} \right)^2 + -V(r) \right] \frac{X(r)}{f^2} = 0. \quad (4.67)$$

Agora a equação em termos da mesma coordenada, podemos fazer uma expansão de  $f$ , com  $f = 1 - \frac{D^2}{r^2}$  em série de potencia do tipo  $1/r$ . Sabendo que C e D são constantes relacionadas a circulação e a drenagem do fluido, regida pela a relação:

$$a = \frac{wC}{c_s^2} \quad (4.68)$$

e

$$b = \frac{wD}{c_s^2} \quad (4.69)$$

Onde  $c_s^2$  é a velocidade do som e consideramos  $c_1 = 1$ . Fazendo uso da expansão referente ao  $f$ , e substituindo as relações para circulação e drenagem descrita pelas as relações acima, a seguinte expressão :

$$\left[ \frac{d^2}{dr^2} - \frac{\tilde{m}^2 + 1/4}{r^2} + \tilde{w}^2 + U(r) \right] X(r) = 0. \quad (4.70)$$

onde

$$\tilde{m}^2 = m^2 + 2am - 2b^2 - 2\lambda mw. \quad (4.71)$$

sendo  $\lambda$

$$\lambda = \alpha w. \quad (4.72)$$

e  $U(r)$  :

$$U(r) = \frac{(a^2 - b^2)m^2 + (3b + 3b^4 - 4amb^2 + \frac{6\alpha mb^4}{\tilde{w}})}{\tilde{w}^2 r^4} + \frac{b(2a - b^2 + 3b^4 - 6amb^4)}{\tilde{w}^4 r^6}. \quad (4.73)$$

agora temos condição de encontrar a amplitude de espalhamento, descrita por

$$f_w(\phi) = \left( \frac{1}{2i\pi\tilde{w}} \right)^{1/2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (e^{2i\delta_m} - 1) e^{im\phi}. \quad (4.74)$$

de início, vamos encontrar a variação  $\delta_m$ , que é descrita pela seguinte fórmula de aproximação :

$$\delta_m \simeq \frac{\pi}{2} (m - \tilde{m}) + \frac{\pi}{2} \int_0^\infty r [J_{\tilde{m}}(wr)]^2 U(r) dr. \quad (4.75)$$

Com a utilização das Equações (4.71),(4.73) em (4.75), temos que variação dada por :

$$\delta_m \simeq \frac{\pi}{2} (\lambda - a) \frac{m}{|m|} + \mathcal{O}\frac{1}{m}. \quad (4.76)$$

Assim, para a menor ordem de  $a$ , o diferencial da seção de choque de espalhamento , com  $b = 0$ , é :

$$\frac{d\sigma}{d\phi} = \frac{1}{2\pi w} \left[ \sum_{m=-\infty}^{\infty} (e^{2i\delta_m} - 1) e^{im\phi} \right]^2. \quad (4.77)$$

Para pequenos ângulos de  $\phi \neq 0$ , temos:

$$\frac{d\sigma}{d\phi} = \frac{\pi}{2w} (a^2 - 2a\lambda + \lambda^2) \left( \frac{4}{\phi^2} - \frac{2}{3} + \frac{\phi^2}{60} + \dots \right). \quad (4.78)$$

tomando o limite de  $\phi \rightarrow 0$  na Equação (4.78), o termo dominante no diferencial de espalhamento é  $\frac{1}{\phi^2}$ ,daí :

$$\frac{d\sigma}{d\phi} = \frac{\pi}{2w} (a^2 - 2a\lambda + \lambda^2) \frac{4}{\phi^2}. \quad (4.79)$$

Agora, fazendo  $a = 0$ , a seção do diferencial é dominado por :

$$\frac{d\sigma}{d\phi} = \frac{2\pi\lambda^2}{w\phi^2}. \quad (4.80)$$

Note que, contrariando ao efeito Aharonov-Bohm usual, no caso com quebra de simetria o diferencial de espalhamento é diferente de zero, mesmo quando o termo referente a circulação do fluxo zero  $a = 0$ . Nosso resultado mostra que essa correção de  $\lambda^2$  devido ao termo de quebra de simetria de Lorentz, pode ser relevante em altas energias. Pois padrões de franjas pode aparecer mesmo quando  $a = 0$ , diferente do caso usual [29].

# Capítulo 5

## Conclusão e perspectiva

Nessa dissertação, fizemos uma revisão sobre os potenciais eletromagnético e discutimos alguns tópicos sobre o efeito Aharonov-Bohm. Para o segundo tópico, fizemos um estudo sobre o modelo análogo acústico ao buraco negro, mostrando como foi feita a comparação para a obtenção da métrica acústica. Estes tópicos serviram de base para o desenvolvimento do nosso trabalho, que teve como objetivo encontrar o espalhamento Aharonov-Bohm análogo através de um termo de quebra de simetria, partindo do modelo abeliano de Higgs. Nossos resultados mostraram que a diferencial de espalhamento permanece mesmo quando os termos relacionados a circulação e a drenagem são zeros, diferente do efeito Aharonov-Bohm usual. Outro fenômeno interessante foi que aparece nessa configuração é que o espalhamento de ondas de baixas frequências é diretamente afetado pelo termo de quebra que viola-Lorentz. Como perspectiva de trabalho futuro, fazer a análise para todos os termos do tensor métrico de quebra  $K_{\mu\nu}$ .



# Referências Bibliográficas

- [1] J.MICHELL,Phil.**Trans. R. Soc,Londe.**;January 1,1784 74:35-57;
- [2] K.SCHWAARZCHILD.;SITZVNGSTER.Preuss.Akad.Wiss.  
Berlin(Math.Phys.),189-196,(1916),**arxiv:Physics/ 9905 030v1**;
- [3] D.FINKESTEIN,**Phys, Rev.110**, 965-977, (1958)
- [4] P.K. TOWNSEND,**Black Holes, Lectures e notas**, arxiv: gr-qc/ 9707012v1,(1997)
- [5] S.W.Hawking , *Narure*,Vol.248, 30-31(1974)
- [6] UNRUH, W.G.;**Experimental black hole evaporation?**, *Phys. Rev. Lett.*, 46,  
(1981), 1351.
- [7] VOLOVIK, G.E.;**The universe in a helium droplet**, (Clarendon, Oxford, 2003).
- [8] M. A. Anacleto, F. A. Brito, E. Passos, **Phys. Lett. B** 694, 149 (2010) [ar-  
Xiv:1004.5360 [hep-th]].
- [9] M. A. Anacleto, F. A. Brito, E. Passos,**Phys. Rev. D** 85, 025013 (2012) [ar-  
Xiv:1109.6298 [hep-th]].
- [10] M. A. Anacleto, F. A. Brito, E. Passos ,**arxiv:1208.2615v2** [help-th] 11 dec 2012
- [11] CHAMBERS, R.G .; **Shift of an Electron Interference Pattern by enclosed  
Magnetic Flux**, *Physical Review Letters*, volume 5(1), 1 de Julho 1960
- [12] GRIFFITHS, D.J.; **Introduction to Quantum Mechanics**. Prentice Hall, 1995.
- [13] AHARONOV, B.; BOHM, D. **Significance of electromagnetic potentials in  
the quantum theory**. *Physical Review*, 115(3):485, August 1959.

- [14] LEMOS, N.A. ; **Mecânica Analítica** 2. ed. Sao Paulo :Editora Livraria da Física ,2007. edition, 1983.
- [15] ORASCH, O.; **The Aharonov-Bohm -Effect** , Bachelor Thesis. December 16,2014.
- [16] SCHWABL, F.; **Quantenmechanik. Springer-Verlag**, 7 edition, 2007
- [17] SAKURAY, J.J.; **Modern Quantum Mechanics**. Addison-Wesley Publishing Company, revised edition edition, 1994.
- [18] WEINBER, S.; **Gravitation and Cosmology : Principles and aplications of the General theory of Relativity** , Johm Wiley and sons (1972).
- [19] ARFKEN .G.A, HANS. J.W .; **Métodos Matemático para Engenharia e Física** .1ª Ed. 2007 : Editora Campus Elsevier (Universitários)
- [20] PAGE, L .; **Phys.Rev.**36,44(1930)
- [21] BERRY,M.V.;**Exact Aharonov-Bohm wavefunction obtatined by applying dirac magnetic factor** . Europaena Journal of Physics,1:240.244,1980.
- [22] LANDAU, L.D.; LIFHIITZ, E.M **Lifshitz , Fluid Mechanics** , .2ª Ed, pergamon ,londre(1987).
- [23] FEYNMAN, R. ;LEIGHTON, R.B.; SANDS, M.**The Feynman Lectures on Physics**, (Addinson-Wesley, Reading, 1963).
- [24] BERTI, E.; CARDOSO, V.; LEMOS, J.P.S **Phys. Rev. D** 70 (2004) 124006
- [25] FETTER, A.L .; **Phys. Rev.** 136 (1964) A1488.
- [26] UNRUH, W.G. ;SCHUTZHOLD,R. ;**Gravity wave analogs of black holes**, [gr-qc/0205099].
- [27] UNRUH, W.G .;**Phys. Rev. Lett.** 46 (1981) 1351
- [28] PESHKIN, M. ; TONOMURA, A. **The Aharonov-Bohm Effect**. Springer- Verlag, 1989.

- [29] DOLAN, S. R.; OLIVEIRA, E.S .;CRISPINO, L.C.B.;**Phys. Lett. B** 701, 485 (2011).