



Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Física

Dissertação de Mestrado

**Estados Coerentes para o Oscilador Isotônico
via a Super-Realização da Álgebra de
Wigner-Heisenberg**

Karina Soares Farias do Nascimento Cunha

Prof. Dr. Aécio F. Lima
Prof. Dr. Rafael de Lima Rodrigues
Orientador

Campina Grande – PB

19 de Abril de 2013

201409101201-737378



0132314

00000000000000000000

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Física

Estados Coerentes para o Oscilador Isotônico via a Super-Realização da Álgebra de Wigner-Heisenberg

Karina Soares Farias do Nascimento Cunha

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Campina Grande como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Mestre em Ciências no Domínio da Física.

Área de Concentração: Partículas Elementares e Teoria de Campos.

Prof. Dr. Aécio F. Lima
Prof. Dr. Rafael de Lima Rodrigues
Orientador

Campina Grande – PB, Paraíba, Brasil

©Karina Soares Farias do Nascimento Cunha



Universidade Federal de Pernambuco
Biblioteca Central
Rua do Recife, 1000 - Recife - PE

Estados coerentes para o oscilador isotônico via a super-realização da álgebra de Wigner-Heisenberg / Karina Soares Farias do Nascimento Cunha.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL DA UFPG

C972e Cunha, Karina Soares Farias do Nascimento.
Estados coerentes para o oscilador isotônico via a super-realização da álgebra de Wigner-Heisenberg / Karina Soares Farias do Nascimento Cunha. – Campina Grande, 2014.
71 f. : il.
Dissertação (Mestrado em Ciências no Domínio da Física) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia.
"Orientação: Prof. Dr. Aécio F. Lima, Prof. Dr. Rafael de Lima Rodrigues".
Referências.
1. Estados Coerentes. 2. Álgebra de Wigner-Heisenberg. 3. Setor Bosônico. 4. SUSY. 5. Oscilador Isotônico I. Lima, Aécio F. II. Rodrigues, Rafael de Lima. III. Título.

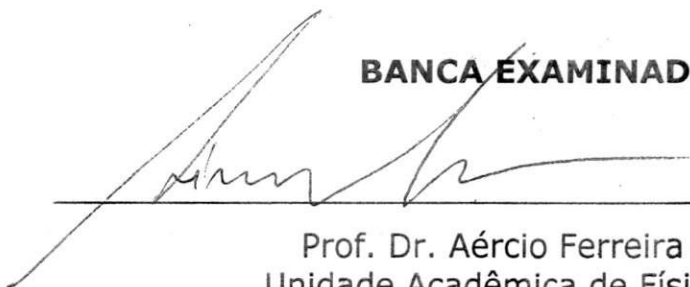
CDU 530.145(043)

KARINA SOARES FARIAS DO NASCIMENTO CUNHA

**ESTADOS COERENTES PARA O OSCILADOR ISOTÔNICO VIA A
SUPER-REALIZAÇÃO DA ÁLGEBRA DE WIGNER-HEISENBERG**

Dissertação aprovada em 19/04/2013

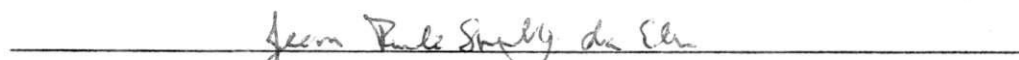
BANCA EXAMINADORA



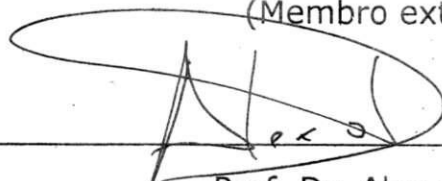
Prof. Dr. Aécio Ferreira de Lima
Unidade Acadêmica de Física – UFCG
(Presidente)



Prof. Dr. Rafael de Lima Rodrigues
Unidade Acadêmica de Educação – UFCG
(Membro externo)



Prof. Dr. Jean Paulo Spinelly da Silva
Departamento de Física – UEPB
(Membro externo)



Prof. Dr. Alex da Silva
Departamento de Física – UEPB
(Membro externo)

Agradecimentos

Meus respeitosos e sinceros agradecimentos ao meu orientador, Professor Doutor Aécio Ferreira de Lima e ao Professor Doutor Rafael de Lima Rodrigues pelo apoio, paciência e compreensão durante a realização deste trabalho e incentivo nessa caminhada acadêmica, como também à CAPES e ao Programa de Pós Graduação em Física pela oportunidade oferecida e pelo apoio financeiro.

A Deus, por ter guiado meus passos no caminho da vida. Apesar de todos os percalços enfrentados, sem fé que deposito em Deus, jamais teria tido a oportunidade de crescer e de enfrentar os medos de alçar voos cada vez mais altos.

À minha Mãe, Mércia e aos meus avós, José (*in memorian*) e Alice que trabalharam incessantemente para dar-me a estrutura familiar adequada para a minha formação pessoal e profissional. Ao meu esposo, Henrique, pelo amor, pela paciência e pelo suporte que tem me dispensado a cada instante de nossas vidas, à minha irmã Kelly, que sempre acreditou em mim e em meus sonhos. Certamente eu não estaria onde estou sem a presença dessa família, que sempre buscou no amor, no trabalho, na união e no respeito a fórmula para enfrentar todas as dificuldades impostas pela vida.

Às minhas amigas de todas as horas Eufrásia, Claudênia e Hepifânia que apesar da distância nunca deixaram de estar presentes em cada momento da minha jornada. Especialmente aos fiéis amigos que conquistei neste processo, Graciana e Gonzales, certamente esta jornada não teria tido resultados positivos sem a contribuição de vocês, espero que essa parceria seja para toda a vida. Ao meu grande amigo Aluísio (*in memorian*) que sempre esteve presente na minha formação e que por vezes caminhou ao meu lado em cada passo dado. Aos amigos que de forma direta ou indireta me ajudaram a alcançar este objetivo.

Resumo

Neste trabalho são determinados os Estados Coerentes do Oscilador Isotônico, a partir da álgebra de Wigner-Heisenberg e da aplicação da Supersimetria em Mecânica Quântica (SUSY). A interação entre a álgebra de Wigner-Heisenberg e a álgebra SUSY permitiu a identificação das coordenadas bosônicas e fermiônicas e seus respectivos espectros de energia. A partir desta setorização, foram construídos os Estados Coerentes para o Oscilador Isotônico para o setor bosônico. Foram analisadas, também, as principais propriedades desses estados, como não-ortogonalidade, relação de super-completude e relação de mínima incerteza, das quais, as duas primeiras condizem com as propriedades dos Estados Coerentes do Oscilador Harmônico. Ao analisar a relação de mínima incerteza para esses estados, verificou-se que para valores determinadas intensidades da barreira centrífuga l atinge-se autoestados da posição ou do momento.

Palavras-chave: Estados Coerentes, Álgebra de Wigner-Heisenberg, Setor Bosônico, SUSY, Oscilador Isotônico.

Abstract

In this work it is determined the Isotonic Oscillator's Coherent States. This was achieved using the Wigner-Heisenberg algebra and the application of Supersymmetry in Quantum Mechanics (SUSY). The interaction between the Wigner-Heisenberg algebra and supersymmetry algebra allowed identification the bosonic and fermionic sectors and their energy spectra. From this sectorization, were built for the Isotonic Oscillator Coherent States for the bosonic sector. Also, it were analyzed the main properties of these states, like non-orthogonality, relation of super-completeness and the relation of minimum uncertainty, of which the first two are consistent with the properties of Coherent States of the Harmonic Oscillator. By analyzing the relation of minimum uncertainty for these states, it was found that for some parameters the intensity of centripetal barrier l eigenstates of position or momentum are obtained.

Keywords: Coherent states, the Wigner-Heisenberg algebra, bosonic sector, SUSY, Isotonic Oscillator.

Sumário

1	Introdução	1
2	Oscilador Harmônico Quântico e Supersimetria em Mecânica Quântica	6
2.1	Oscilador Harmônico Quântico - OHQ	6
2.1.1	Elementos de Matriz	10
2.2	Princípios Básicos de Supersimetria em Mecânica Quântica - SUSYQM	12
2.2.1	SUSY e o Oscilador Harmônico	12
2.2.2	Propriedades das Componentes da Hamiltoniana	18
3	Estados Coerentes	20
3.1	Estrutura da Hamiltoniana do Sistema	23
3.2	Construção dos Estados Coerentes	24
3.3	Propriedades do Espaço de Hilbert	26
3.3.1	Não-Ortogonalidade	26
3.3.2	Super-Completeness	27
3.4	Expansões no Espaço de Hilbert	27
3.4.1	Estados Coerentes em Termos de Estados Diagonais	28
3.4.2	Estados Arbitrários Expandidos em Termos de Estados Coerentes	28
3.4.3	Método dos Operadores Gerais em Termos de Estados Coerentes	28
4	Álgebra de Wigner-Heisenberg	31
4.1	Super Realização da álgebra de Wigner- Heisenberg	33
5	Estados Coerentes para o Oscilador Isotônico	50
5.1	Não-Ortogonalidade	53
5.2	Super-Completeness	53
5.3	Relação de Incerteza	56
6	Conclusão	60
	Referências Bibliográficas	62

CAPÍTULO 1

Introdução

A Física sofreu várias mudanças de paradigma no decorrer de sua história, uma das mais significativas ocorreu na segunda metade do século XX, com a criação da teoria quântica. Mas essa guinada começou na verdade no século XIX, com o trabalho de Young e Fresnel Augustin, com a descoberta da natureza ondulatória da luz e dos fenômenos de interferência, os quais não foram de todo compreendidos. A teoria de Clerk Maxwell estabelecida por volta de 1860, definiu que as ondas de luz são oscilações dos campos elétrico e magnético e assim, descreveu a dinâmica da eletricidade e do magnetismo.

É em 1900, com Max Planck, que a mecânica quântica ganha força nos meios acadêmicos, a partir de medições do espectro de distribuição da radiação térmica e a sua famosa teoria da radiação de corpo negro que o levou a perceber que os osciladores harmônicos possuíam energias que estavam distribuídas por valores discretos e regularmente espaçados [1]. A frequência ν desses osciladores seria limitada a valores de energia que eram múltiplos inteiros ($n = 0, 1, 2, \dots$) do denominado quantum de energia, $h\nu$, em que h é a conhecida constante de Planck. Esta descoberta o levou a perceber que a distribuição de radiação térmica cai rapidamente com o aumento da frequência, explicando a conhecida catástrofe do ultravioleta [2].

A quantização de energia de oscilação dos elétrons conflita com o seu caráter contínuo, conforme sempre se aceitou. Este fato causou perturbação no meio físico, porém, em 1905, Albert Einstein propôs em seu segundo artigo [3], que a quantização deveria ser estendida à energia eletromagnética livre e não só ao oscilador harmônico. Esta idéia surgiu do efeito fotoelétrico descoberto por Hertz em 1887. Einstein assumiu, teoricamente, que a própria luz consiste em pacotes de energia localizada e cada um possui um quantum de energia, mas só em 1914 um experimento realizado por Robert Millikan confirmou as previsões de Einstein para o efeito fotoelétrico.

Em 1923, o físico Arthur Compton, realizou um experimento que consistia em bombardear um alvo de grafite com raios-X de uma determinada frequência, ao medir a frequência de da radiação espalhada pelo alvo, verificou que surgia uma radiação com frequência menor, desse modo, essa estranha radiação detectada deu margem para que Millikan assumisse que

os raios-X também são quantizados, ou seja, são partículas, e essa perda de energia pode ser calculada em termos da diminuição de frequência através fórmula de Planck. Esse efeito ficou conhecido como "Efeito Compton", o qual lhe garantiu o prêmio Nobel de 1927.

Entre 1924 e 1926 De Broglie, Heisenberg, Schrödinger e outros realizaram o grande feito de estruturar o átomo, que deu margem para a criação uma nova teoria mais geral da estrutura da matéria, como também atribuíram a partículas materiais, tal qual o elétron, muito do comportamento ondulatório.

A dificuldade enfrentada nesses tempos estava na idéia de que a Física chegou em um ponto que não se podia mais negar a teoria ondulatória da luz para retomar a concepção corpuscular. De fato, isso solucionaria os novos problemas, como espectro do corpo negro e o efeito Compton, mas às custas de várias outras questões dantes resolvidas por Maxwell, como a interferência da luz. Não se podia abandonar uma teoria em detrimento da outra, mas ao mesmo tempo essas teorias não estavam associadas. Surge aí uma divisão de idéias entre uma teoria clássica que explica a natureza ondulatória da luz (antes de Planck) e uma "semiclássica" que explica a natureza corpuscular (pós Planck). É a introdução da constante de Planck que marca a transição da era clássica para a era moderna [1].

A chamada era "semiclássica" durou até 1927 quando Paul Dirac [4] descobriu o vácuo, um espaço vazio, tal como um sistema dinâmico. Planck mostrou, em 1900, que as energias dos osciladores harmônicos restringiam-se a n vezes a energia quantizada, $h\nu$. Dirac verificou que na verdade essas energias não são $nh\nu$ e sim, $(n + \frac{1}{2}) h\nu$, ou seja, esse $\frac{1}{2}h\nu$ é a energia do estado fundamental, ou seja do estado de vácuo. Isso significa que o quantum de energia nunca será encontrado em repouso, ele sempre apresentará um estado fundamental, o chamado ponto zero. Portanto, pode-se afirmar que o vácuo é um sistema dinâmico ativo [1].

Como consequência da descoberta de Dirac, foi encontrada uma partícula material que exhibe o comportamento ondulatório do quanta de luz, desse modo, G. N. Lewis em 1926, sugeriu que o quanta de luz poderia ser uma partícula elementar e chamou-a de fóton [1]. Essas partículas eram discretas, de existência transitória e que poderiam ser criadas ou aniquiladas.

Surge aí uma nova linguagem, que ficou conhecida por mecânica quântica, a qual acarretou aquilo que Popper [5], chamou de "cisma na Física", já que, segundo Chibeni [6], os próprios pais da teoria estabeleceram uma divisão de idéias, de um lado estava Einstein, Schrödinger e De Broglie, defendendo a idéia de que a mecânica quântica não pode construir uma descrição completa da realidade, do outro, estavam Bohr, Heisenberg, Dirac, Born e Jordan, que acreditavam que ela trazia para o homem a necessidade de fazer revisões profundas nas mais variadas concepções fundamentais da Física e da Filosofia. Essa divisão provocou muitas discussões a respeito da validade dessa nova teoria em que os primeiros buscavam uma teoria completa em que um elemento do modelo corresponde a cada elemento da realidade e na quântica a idéia é um pouco mais rebuscada, já que ela não se comporta como a clássica. Na teoria quântica, as variáveis, como a contribuição do campo elétrico por exemplo, estão associadas com operadores no espaço vetorial de Hilbert, que representa o estado do sistema. Os

operadores podem ser, por exemplo, de abaixamento, o qual reduz a um número os quanta presentes no campo, dentre outros que agem de formas próprias em cada estado do sistema. As medições quânticas dependem geralmente da forma pela qual as medições são realizadas. Então, por volta de 1926 muitos físicos dedicaram suas atividades a desenvolver meios de detectar experimentalmente os fótons e descrever seu comportamento quântico. Técnicas de medição foram desenvolvidas e o avanço da tecnologia nesta época permitiu aos físicos experimentais verificarem as mais diversas abordagens em óptica quântica.

Em 1926, logo após o surgimento da mecânica quântica, Schrödinger [7] ao postular a equação diferencial que governa a evolução temporal da onda de matéria de De Broglie sugeriu que poderia existir um estado quântico que estivesse em consonância com os estados clássicos do oscilador harmônico. Esses estados possuiriam autofunções quânticas para o oscilador harmônico com as seguintes características: Estados quânticos descritos por função de onda gaussiana geral, portanto possuíam relação de incerteza mínima, a largura da gaussiana, neste caso, descreveria o estado fundamental, possuiria momento linear e energia que seguissem a trajetória de uma partícula clássica no potencial e não mudassem sua forma no decorrer do tempo. Por possuir características clássicas, esses estados foram denominados "quasi-clássicos" [8].

Já na década de 1950 surgiram propostas para a utilização de emissão estimulada a partir de um sistema de população invertida para a amplificação de microondas, as quais foram realizadas, de forma independente por Weber [9], Gordon, Zeiger e Townes [10, 11], Basov e Prokhorov [12, 13]. O grupo de Townes, instalado na Universidade de Columbia foi o primeiro a denominar as amplificações de microondas por emissão estimulada de radiação de "maser". O primeiro maser desenvolvido ocorreu numa transição de microondas numa molécula de amônia, sua viabilidade em sistemas ópticos foi verificada por Schawlow e Townes [14] em 1958. Em 1960, Maiman [15] conseguiu operar um laser de rubi pulsado (acrônimo para "light amplification by stimulation emission of radiation- LASER) [16]. O primeiro laser de onda contínua foi feito de gás He-Ne em 1961. Em 1962 os pesquisadores conseguiram produzir laser em circuitos semicondutores.

Logo após o surgimento do laser, se iniciou uma série de pesquisas sobre a interação da matéria com o campo eletromagnético. Klauder [17] em 1960 utilizou os estados quasi-clássicos propostos por Schrödinger para mostrar a equivalência entre as descrições da mecânica semiclassical e da mecânica quântica de feixes de luz com estática arbitrária, sem considerar os efeitos não-lineares [8]. Em 1963, Glauber [18, 19] mostrou que autoestados quânticos de um campo de radiação são autoestados do operador de abaixamento dos fótons. Ele percebeu que essas autofunções são obtidas a partir da ação de um operador deslocamento sobre o vácuo do campo eletromagnético livre e que possuem relação de incerteza mínima, como proposto por Schrödinger. Glauber denominou esses estados de Estados Coerentes, os quais possuem as propriedades de super-completude e de não-ortogonalidade.

Verificou-se mais adiante que esses Estados Coerentes e o laser possuem a mesma estatística, como distribuição gaussiana e comportamento quasi-clássico. Estes fatos permitiram o

surgimento de uma nova área de estudos, denominada Óptica Quântica e os Estados Coerente ganharam notoriedade no meio acadêmico. Diversos trabalhos foram publicados desde então sobre tais estados e cada vez mais surgem novos questionamentos e novas expectativas com respeito às suas limitações teóricas e experimentais.

Dentre tantos importantes físicos que enveredaram suas pesquisas pelo caminho da mecânica quântica, pode-se destacar a contribuição de Wigner [20], o qual questionou se equações do movimento determinam unicamente a relação de comutação dos operadores, para isso Wigner propôs modificar a relação de comutação entre a posição e o momento e verificar se mesmo alterando o resultado desta relação, as equações de movimento de Heisenberg (oscilador harmônico) continuavam a ser obedecidas. A partir daí originou-se uma nova álgebra, que ficou conhecida como álgebra de Wigner - Heisenberg.

Diante desta colocação surgiu a necessidade de aprofundar os estudos sobre os Estados Coerentes para o oscilador Isotônico, que é um oscilador harmônico unidimensional com barreira centrífuga [21–23] utilizando a álgebra de Wigner-Heisenberg. Para tal, considera-se uma aproximação análoga feita por Barut - Girardello [24] para construir Estados Coerentes como autoestado do operador de abaixamento. A primeira vez que se determinou Estados Coerentes para um oscilador Isotônico foi em 1971, por Dodonov-Malkin e Man'ko [25].

Os Estados Coerentes generalizados para o oscilador Isotônico na representação de Schrödinger foram construídos por Sharma, Mehta e Sudarshan em 1978 [26] e as representações e propriedades do oscilador para-bose foram investigadas também por estes autores em 1980 e 1982 [27, 28]

Neste trabalho serão investigados Estados Coerentes para o oscilador Isotônico [29] utilizando-se da álgebra de Wigner-Heisenberg com a aplicação da Supersimetria em Mecânica Quântica (SUSYQM), a qual é considerada uma das áreas da Mecânica Quântica que tem recebido muita atenção ultimamente. Isto é evidenciado pelas freqüentes aparições de trabalhos de pesquisa, enfatizando diferentes aspectos de SUSYQM [30–36]. Na verdade, a manifestação do modelo Higgs-solúvel em férmions enriqueceu consideravelmente nossa compreensão de degenerescências e propriedades de simetria de sistemas físicos. O conceito de supersimetria (SUSY) surgiu pela primeira vez em 1971, quando Ramond [37] propôs uma equação de onda para férmions livres com base na estrutura do modelo dual de bósons. Suas propriedades formais foram encontradas para preservar a estrutura da álgebra Virasoro. Pouco depois, Neveu e Schwarz [38] construía uma teoria dupla empregando regras de anticomutação de alguns operadores, bem como aqueles que correspondem aos tipos de Oscilador Harmônico do modelo dual convencional para bósons. Por ser uma área abrangente pode-se dizer em linhas gerais que a SUSYQM permite, dentre outras propriedades, setorizar a Hamiltoniana de um sistema em duas coordenadas, Bosônicas e Fermiônicas. Deste modo é possível obter Estados Coerentes para o setor bosônico da Hamiltoniana do oscilador Isotônico, objetivo principal desta pesquisa.

Nestas condições, este trabalho organiza-se da seguinte forma: No capítulo 2 faz-se uma breve revisão sobre o Oscilador Harmônico Quântico (OHQ), verificando desde a Hamiltoniana

do sistema até a obtenção dos autosestados de energia e da relação de mínima incerteza do OHQ, como também busca-se introduzir o estudo sobre os princípios básicos SUSYQM aplicada ao OHQ, afim, faz-se a setorização bosônica e fermiônica da Hamiltoniana do sistema em questão e obtém-se os espectros de energia e as funções de onda de cada componente. O capítulo 3 trabalha-se, em detalhes, toda a álgebra de Wigner-Heisenberg, a partir da Hamiltoniana do OHQ, neste mesmo processo utiliza-se a álgebra SUSY para estabelecer a divisão entre os setores bosônico e fermiônico da Hamiltoniana [39,40], de modo a conhecer a contribuição de cada setor nesta nova álgebra. Desta forma, pode-se obter todo o espectro de energia para estes setores e conhecer seus novos operadores de abaixamento e de levantamento, como também a relação de comutação entre eles; o capítulo 4 faz uma revisão sobre Estados Coerentes do oscilador harmônico, para que se conheça as principais propriedades desses estados, afim de fazer uma comparação com Estados Coerentes do oscilador Isotônico a serem definidos; no capítulo 5 esses novos Estados Coerentes para o setor bosônico serão construídos [29] e aí será feita a análise das propriedades de não-ortogonalidade, super-completude e relação de incerteza mínima. As conclusões serão apresentadas no capítulo 6, incluindo a análise dos resultados obtidos e propostas para trabalhos futuros.

CAPÍTULO 2

Oscilador Harmônico Quântico e Supersimetria em Mecânica Quântica

2.1 Oscilador Harmônico Quântico - OHQ

O problema do Oscilador Harmônico Quântico tornou-se importante para o desenvolvimento da teoria quântica, dado que, nas vizinhanças de um ponto de equilíbrio estável, qualquer sistema pode ser aproximado pelo Oscilador Harmônico. Segundo Sakurai [41], do ponto de vista pedagógico, serve para ilustrar os conceitos e métodos básicos da Mecânica Quântica.

Não obstante, para que se possa verificar o comportamento do Oscilador de Wigner Heisenberg, faz-se necessário partir do OHQ, o qual será, também, parâmetro de comparação para verificar a validade do novo oscilador.

Desse modo, considerando um OH composto por uma partícula de massa m , presa a uma mola de constante elástica k , em movimento unidimensional sob a ação de uma força elástica de valor $-kx$, ou seja, obedecendo à Lei de Hook. A sua energia potencial é dada por: $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$, em que ω é a frequência angular do Oscilador Harmônico Clássico, dada por $\sqrt{\frac{k}{m}}$. Nestas condições, pode calcular os autokets e autovalores de energia a partir da Hamiltoniana básica do sistema, dado por:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2\hat{x}^2}{2} \quad (2.1)$$

Os operadores \hat{x} e \hat{p} são hermitianos, mas, convém definir dois operadores não hermitianos, aqui definidos por operadores de levantamento (a^+) e abaixamento (a^-), por razões que serão explicadas mais adiante, dados por:

$$\hat{a}^\mp = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(\hat{x} \pm \frac{i\hat{p}}{m\omega} \right) \quad (2.2)$$

A relação de comutação entre esses operadores, também chamados de operadores escada, é dada por:

$$\begin{aligned}
 [\hat{a}^-, \hat{a}^+]_- &= \frac{m\omega}{2\hbar} \left[\left(x + \frac{i\hat{p}}{m\omega} \right), \left(\hat{x} - \frac{i\hat{p}}{m\omega} \right) \right] \\
 &= \left(\frac{1}{2\hbar} \right) (-i[\hat{x}, \hat{p}] + i[\hat{p}, \hat{x}]) \\
 &= \left(\frac{1}{2\hbar} \right) (-i(i\hbar) + i(-i\hbar)) \\
 &= \left(\frac{1}{2\hbar} \right) (\hbar + \hbar) \\
 &= 1
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

A partir dos operadores escada, pode-se construir o operador de número (N), hermitiano, o qual é definido por

$$N = \hat{a}^+ \hat{a}^- \tag{2.4}$$

Fazendo uso da definição de tais operadores, obtém-se

$$\begin{aligned}
 N &= \hat{a}^+ \hat{a}^- = \frac{m\omega}{2\hbar} \left(\hat{x} - \frac{i\hat{p}}{m\omega} \right) \left(\hat{x} + \frac{i\hat{p}}{m\omega} \right) \\
 &= \frac{m\omega}{2\hbar} \left(\hat{x}^2 + \frac{\hat{p}^2}{m^2\omega^2} \right) + \left(\frac{i}{2\hbar} \right) [\hat{x}, \hat{p}] \\
 &= \frac{m\omega}{2\hbar} \left(\hat{x}^2 + \frac{\hat{p}^2}{m^2\omega^2} \right) - \frac{1}{2} \\
 &= \frac{\hat{H}}{\hbar\omega} - \frac{1}{2}
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Este resultado pode ser reescrito como,

$$\hat{H} = \hbar\omega \left(N + \frac{1}{2} \right) \tag{2.6}$$

Segundo [41], uma vez que H é uma função linear de N , este pode ser diagonalizado simultaneamente com H , para que este procedimento seja possível, representa-se um autoket N por seu autovalor n , ou seja, $N|n\rangle = n|n\rangle$. Mas, da equação de Schrödinger tem-se que $H|n\rangle = E_n|n\rangle$, então, desse modo (2.6) é dada por

$$\hbar\omega \left(N + \frac{1}{2} \right) |n\rangle = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega |n\rangle \tag{2.7}$$

De (2.7) pode-se verificar que os autovalores de energia são dados por

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega \tag{2.8}$$

Do mesmo modo que o operador de número N foi importante para definir os autoestados de energia do OH, ele também pode ser utilizado para dar significado físico aos operadores de levantamento e de abaixamento, os quais lhe deram origem. Desse modo, vale observar as seguintes relações de comutação.

$$[N, \hat{a}^-]_- = [\hat{a}^+ \hat{a}^-, \hat{a}^-]_- = -\hat{a}^- \quad (2.9)$$

Da mesma forma,

$$[N, \hat{a}^+]_- = [\hat{a}^+ \hat{a}^-, \hat{a}^+]_- \hat{a}^+ \quad (2.10)$$

Assim, pode verificar que,

$$\begin{aligned} N\hat{a}^+|n\rangle &= (N\hat{a}^+ - \hat{a}^+N + \hat{a}^+N)|n\rangle \\ &= ([N, \hat{a}^+]_- + \hat{a}^+N)|n\rangle \\ &= (\hat{a}^+ + \hat{a}^+N)|n\rangle \\ &= (N+1)\hat{a}^+|n\rangle \\ &= (n+1)\hat{a}^+|n\rangle \end{aligned} \quad (2.11)$$

Seguindo a mesma álgebra, tem-se,

$$\begin{aligned} N\hat{a}^-|n\rangle &= (N\hat{a}^- - \hat{a}^-N + \hat{a}^-N)|n\rangle \\ &= ([N, \hat{a}^-]_- + \hat{a}^-N)|n\rangle \\ &= (-\hat{a}^- + \hat{a}^-N)|n\rangle \\ &= (N-1)\hat{a}^-|n\rangle \\ &= (n-1)\hat{a}^-|n\rangle \end{aligned} \quad (2.12)$$

Segundo [41], estes resultados estabelecem que $\hat{a}^+|n\rangle$ ($\hat{a}^-|n\rangle$) são autokets de N com autovalores aumentado (diminuído) de um quantum de energia $\hbar\omega$. Daí surge os termos operadores de levantamento para \hat{a}^+ e abaixamento para \hat{a}^- . Partindo desta análise, pode-se reescrever 2.11 e 2.12 da seguinte forma, respectivamente:

$$N|n+1\rangle = (n+1)|n+1\rangle \quad (2.13)$$

$$N|n-1\rangle = (n-1)|n-1\rangle \quad (2.14)$$

Ou seja, $\hat{a}^+|n\rangle$ eleva os autovalores de energia em um quantum, daí obtém-se $|n+1\rangle$, do mesmo modo, $\hat{a}^-|n\rangle$, abaixa os autovalores de energia em um quantum, por isso o novo

autoestado é dado por: $|n - 1\rangle$. Isto implica que $\hat{a}^+|n\rangle$ e $|n + 1\rangle$ ($\hat{a}^-|n\rangle$ e $|n - 1\rangle$) serem o mesmos a menos de uma constante multipliativa, a qual pode ser exemplificada como,

$$\hat{a}^-|n\rangle = c|n - 1\rangle \quad (2.15)$$

em que c é uma constante numérica. Para a obtenção desta constante é necessários que os autoestados $|n\rangle$ e $|n - 1\rangle$ sejam normalizados. Multiplicando-se ambos os membros de (2.15) por $\langle n - 1|c^*$, obtém-se:

$$\langle n - 1|c^*\hat{a}^-|n\rangle = |c|^2\langle n - 1|n - 1\rangle \quad (2.16)$$

Como, $\langle n - 1|c^* = \langle n|\hat{a}^+$, tem-se, que:

$$\langle n - 1|c^*\hat{a}^-|n\rangle = \langle n|\hat{a}^+\hat{a}^-|n\rangle = \langle n|N|n\rangle = n = |c|^2 \quad (2.17)$$

Ou seja,

$$c = \sqrt{n} \quad (2.18)$$

Assim,

$$\hat{a}^-|n\rangle = c|n - 1\rangle = \sqrt{n}|n - 1\rangle \quad (2.19)$$

Do mesmo modo,

$$\hat{a}^+|n\rangle = c|n + 1\rangle = \sqrt{n + 1}|n + 1\rangle \quad (2.20)$$

Fazendo sucessivas aplicações do operador a^- em ambos os membros de (2.19) percebe-se que os autestados vão diminuindo obtendo-se n cada vez menores até que chegue o final da sequência, desse modo temos que $n > 0$. Calculando-se a norma de $\hat{a}^-|n\rangle$, verifica-se, **por definição**, que esta é sempre positiva ou nula, ou seja,

$$\begin{aligned} \langle n|\hat{a}^+(\hat{a}^-|n\rangle) &\geq 0 \\ \langle n|\hat{a}^+\hat{a}^-|n\rangle &\geq 0 \\ \langle n|N|n\rangle &\equiv n \geq 0 \end{aligned} \quad (2.21)$$

Logo, n só assume valores inteiros e positivos, portanto o operador de abaixamento (\hat{a}^-) só deverá ser aplicado até que $n = 0$.

De (2.8), pode-se verificar que, para $n = 0$, a energia do estado fundamental do OHQ é dada por:

$$E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega \quad (2.22)$$

Ou seja, é a menor energia possível de ser medida no Oscilador.

Analogamente, pode-se analisar aplicações sucessivas de a^+ ao estado fundamental $|0\rangle$, então, a partir de (2.20), obtém-se:

$$|n+1\rangle = \left(\frac{\hat{a}^+}{\sqrt{n+1}} \right) |n\rangle \quad (2.23)$$

então, para $n = 0$, tem-se:

$$|1\rangle = \left(\frac{\hat{a}^+}{\sqrt{1}} \right) |0\rangle = \hat{a}^+ |0\rangle$$

Para $n = 1$, tem-se:

$$|2\rangle = \left(\frac{\hat{a}^+}{\sqrt{2}} \right) |1\rangle$$

então, para o n -ésimo autoestado de energia obtém-se:

$$\begin{aligned} |n\rangle &= \left(\frac{\hat{a}^+}{\sqrt{n+1}} \right) |n-1\rangle \\ &= \left[\frac{(\hat{a}^+)^n}{\sqrt{n!}} \right] |0\rangle \end{aligned} \quad (2.24)$$

Assim sendo, pode-se estabelecer os valores de n , então a equação (2.8) pode ser revista como sendo:

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega \quad (2.25)$$

dado que $n = 0, 1, 2, \dots$, diz-se que foram construídos os autoestados simultâneos de N e H com autovalores de energia.

2.1.1 Elementos de Matriz

Encontrado o espectro de energia do OHQ (2.25), pode-se definir a relação de incerteza entre a posição (x) e o momento (p) da partícula de massa m que compõe o sistema massa-mola. Desse modo, faz-se necessário definir os elementos de matriz dos operadores de abaixamento e levantamento, afim de determinar os valores esperados de x e p . Então, os elementos de matriz de \hat{a}^- e \hat{a}^+ , são dados, respectivamente por:

$$\begin{aligned} \langle n' | \hat{a}^- | n \rangle &= \langle n' | \sqrt{n} | n-1 \rangle \\ &= \sqrt{n} \delta_{n', n-1} \end{aligned} \quad (2.26)$$

e

$$\begin{aligned} \langle n' | \hat{a}^+ | n \rangle &= \langle n' | \sqrt{n+1} | n+1 \rangle \\ &= \sqrt{n+1} \delta_{n', n+1} \end{aligned} \quad (2.27)$$

Manipulando (2.2) para que se obtenha o termo $(\hat{a}^- + \hat{a}^+)$ e $(-\hat{a}^- + \hat{a}^+)$, tem-se, respectivamente,

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\hat{a}^- + \hat{a}^+), \quad (2.28)$$

$$\hat{p} = i\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}(-\hat{a}^- + \hat{a}^+). \quad (2.29)$$

Deste modo, é possível determinar os elementos de matriz de \hat{x} e de \hat{p} ,

$$\begin{aligned} \langle n'|\hat{x}|n\rangle &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\langle n'|(\hat{a}^- + \hat{a}^+)|n\rangle \\ &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\sqrt{n}\delta_{n',n-1} + \sqrt{n+1}\delta_{n',n+1}), \end{aligned} \quad (2.30)$$

$$\begin{aligned} \langle n'|\hat{p}|n\rangle &= i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\langle n'|(-\hat{a}^- + \hat{a}^+)|n\rangle \\ &= i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}(-\sqrt{n}\delta_{n',n-1} + \sqrt{n+1}\delta_{n',n+1}). \end{aligned} \quad (2.31)$$

Como os operadores \hat{a}^- e \hat{a}^+ não comutam com o operador N , \hat{x} e \hat{p} não são diagonais na representação N .

A partir de (2.30) e (2.31) é possível determinar os valores esperados de \hat{x}^2 e \hat{p}^2 para o estado fundamental, desse modo, de (2.28), tem-se:

$$\hat{x}^2 = \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)(\hat{a}^- + \hat{a}^+)^2 \quad (2.32)$$

Assim,

$$\begin{aligned} \langle \hat{x}^2 \rangle &= \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right) \langle (\hat{a}^{-2} + \hat{a}^{+2} + \hat{a}^- \hat{a}^+ + \hat{a}^+ \hat{a}^-) \rangle \\ &= \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right) [\langle 0|\hat{a}^{-2}|0\rangle + \langle 0|\hat{a}^{+2}|0\rangle + \langle 0|\hat{a}^- \hat{a}^+|0\rangle + \langle 0|\hat{a}^+ \hat{a}^-|0\rangle] \\ &= \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right) [\langle 0|\hat{a}^- \hat{a}^+|0\rangle] \\ &= \frac{\hbar}{2m\omega} \end{aligned} \quad (2.33)$$

Seguindo o mesmo procedimento,

$$\hat{p}^2 = -\left(\frac{m\omega\hbar}{2}\right)(\hat{a}^{-2} - \hat{a}^- \hat{a}^+ - \hat{a}^+ \hat{a}^- + \hat{a}^{+2}) \quad (2.34)$$

Então,

$$\begin{aligned}
\langle \hat{p}^2 \rangle &= -\left(\frac{m\omega\hbar}{2}\right) \langle (\hat{a}^{-2} + \hat{a}^{+2} - \hat{a}^- \hat{a}^+ - \hat{a}^+ \hat{a}^-) \rangle \\
&= -\left(\frac{m\omega\hbar}{2}\right) [\langle 0|\hat{a}^{-2}|0\rangle + \langle 0|\hat{a}^{+2}|0\rangle - \langle 0|\hat{a}^- \hat{a}^+|0\rangle - \langle 0|\hat{a}^+ \hat{a}^-|0\rangle] \\
&= -\left(\frac{m\omega\hbar}{2}\right) [-\langle 0|\hat{a}^- \hat{a}^+|0\rangle] \\
&= \left(\frac{m\omega\hbar}{2}\right).
\end{aligned} \tag{2.35}$$

Neste ponto da discussão sobre o OHQ, é possível verificar as relações de incerteza a partir de (2.28) e (2.29). Sabendo que $\langle \hat{x} \rangle = 0$ e $\langle \hat{p} \rangle = 0$ e conhecendo os resultados em (2.33) e (2.35), tem-se que:

$$\langle (\Delta \hat{x})^2 \rangle = \langle \hat{x}^2 \rangle - \langle \hat{x} \rangle^2 = \frac{\hbar}{2m\omega} \tag{2.36}$$

e que,

$$\langle (\Delta \hat{p})^2 \rangle = \langle \hat{p}^2 \rangle - \langle \hat{p} \rangle^2 = \left(\frac{m\omega\hbar}{2}\right) \tag{2.37}$$

então, de (2.36) e (2.37), pode-se verificar que o produto de incerteza mínimo para o estado fundamental é dado por:

$$\langle (\Delta \hat{x})^2 \rangle \langle (\Delta \hat{p})^2 \rangle = \frac{\hbar}{2m\omega} \left(\frac{m\omega\hbar}{2}\right) = \frac{\hbar^2}{4} \tag{2.38}$$

Este resultado é satisfatório para uma função de onda gaussiana. Para os estados excitados o produto de incerteza são superiores ao apresentado para o estado fundamental.

2.2 Princípios Básicos de Supersimetria em Mecânica Quântica - SUSYQM

2.2.1 SUSY e o Oscilador Harmônico

A SUSYQM, em termos gerais tem a finalidade de descrever a estrutura e as propriedades de simetrias matemáticas da equação de Schrödinger [42]. Então, todo sistema quântico simples não-relativístico, descrito por tal equação pode ser aplicado ao modelo da SUSYQM. Neste afim pode-se iniciar a discussão do tema utilizando modelo padrão do oscilador harmônico. A Hamiltoniana H_B é dado por:

$$\hat{H}_B = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} m\omega^2 \hat{x}^2 \tag{2.39}$$

em que, ω é a frequência angular do oscilador e $\hbar = \frac{h}{2\pi}$, h é a constante de Planck. pode-se fazer a seguinte consideração: $\hbar = m = 1$ com a finalidade de unificar o sistema de unidades e simplificar os resultados. Pode-se associar à Hamiltoniana \hat{H}_B dois operadores \hat{b}^- e \hat{b}^+ , chamados operadores de abaixamento e de levantamento, respectivamente. Como $\hat{p} = -i\frac{d}{dx}$, esses operadores são definidos por:

$$\hat{b}^- = \frac{i}{2\omega}(\hat{p} - i\omega\hat{x}) \quad (2.40)$$

$$\hat{b}^+ = -\frac{i}{2\omega}(\hat{p} + i\omega\hat{x}) \quad (2.41)$$

Substituindo (2.40) e (2.41) em (2.39), obtém-se:

$$\hat{H}_B = \frac{1}{2}\omega[\hat{b}^+, \hat{b}^-]_+ \quad (2.42)$$

em que $[\hat{b}^+, \hat{b}^-]_+$ é o anticomutador de \hat{b}^- e \hat{b}^+ .

Seguindo o mesmo procedimento realizado com o OHQ, pode-se verificar a ação desses operadores num autoestado $|n\rangle$ do oscilador harmônico, de modo que:

$$\hat{b}^- |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle \quad (2.43)$$

e

$$\hat{b}^+ |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle \quad (2.44)$$

Associando um operador de número bosônico dado por $N_B = \hat{b}^+ \hat{b}^-$, obtém-se:

$$N_B |n\rangle = n |n\rangle \quad (2.45)$$

em que $n = n_B$.

Até aqui os operadores supersimétricos \hat{b}^- e \hat{b}^+ , têm seguido a álgebra o OHQ da seção anterior, sendo assim, é possível inferir que $|n\rangle = \frac{(\hat{b}^+)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle$, com $n = 0, 1, 2, \dots$, como obtido em (2.24). Ainda, pode-se verificar que sendo $|0\rangle$ o estado fundamental, então, $\hat{b}^- |0\rangle = 0$.

As relações de comutação entre os operadores \hat{b}^- e \hat{b}^+ podem ser observadas partindo da condição de que $[\hat{x}, \hat{p}] = i$, ou seja:

$$[\hat{b}^-, \hat{b}^+]_- = 1 \quad (2.46)$$

Por consequência, seguem-se as seguintes relações:

$$[\hat{b}^-, \hat{b}^-]_- = [\hat{b}^+, \hat{b}^+]_- = 0, \quad (2.47)$$

$$[\hat{b}^-, \hat{H}]_- = \omega \hat{b}^-, \quad (2.48)$$

$$[\hat{b}^+, \hat{H}]_- = -\omega \hat{b}^+. \quad (2.49)$$

Utilizando o resultado obtido em (2.46) pode-se reescrever (2.39) como,

$$\hat{H}_B = \omega \left(\hat{b}^+ \hat{b}^- + \frac{1}{2} \right) = \omega \left(N_B + \frac{1}{2} \right) \quad (2.50)$$

Analogamente a (2.25), o espectro de energia será,

$$E_B = \omega \left(n_B + \frac{1}{2} \right) \quad (2.51)$$

Deste modo, na equação (2.42) percebe-se que a Hamiltoniana \hat{H}_B é simétrica à relação entre \hat{b}^- e \hat{b}^+ , ou seja, confirmando a ideia de que as partículas associadas obedecem à estatística de Bose.

Substituindo os operadores \hat{b}^- e \hat{b}^+ em (2.3) pelos operadores correspondentes do oscilador fermiônico pode-se obter um Hamiltoniano fermiônico \hat{H}_F , em que:

$$\hat{H}_F = \frac{\omega_F}{2} [\hat{a}^+, \hat{a}^-]_- \quad (2.52)$$

Em que, \hat{a}^+ e \hat{a}^- são os respectivos operadores de levantamento e deabaixamento do oscilador fermiônico, os quais satisfazem as seguintes condições:

$$[\hat{a}^-, \hat{a}^+]_+ = 1 \quad (2.53)$$

$$[\hat{a}^-, \hat{a}^-]_+ = [\hat{a}^+, \hat{a}^+]_+ = 0 \quad (2.54)$$

Analogamente ao operador N_B , pode-se definir o operador de número fermiônico como sendo, $N_F = \hat{a}^+ \hat{a}^-$.

$$\begin{aligned} N_F^2 &= (\hat{a}^+ \hat{a}^-)(\hat{a}^+ \hat{a}^-) \\ &= (\hat{a}^+ \hat{a}^-) = N_F \end{aligned} \quad (2.55)$$

ou seja,

$$N_F(N_F - 1) = N_F \quad (2.56)$$

De acordo com (2.54) e (2.56), N_F restringe-se aos autovalores 0 e 1 apenas, este último resultado ainda está em conformidade com o princípio de exclusão de Pauli. A natureza antisimétrica de \hat{H}_F diante das relações entre \hat{a}^- e \hat{a}^+ sugere que tais objetos satisfazem a estatística de Fermi-Dirac [43]. Tais objetos são chamados de férmions. Do mesmo modo como acontece

com \hat{b}^- e \hat{b}^+ em (2.40) e em (2.41), os operadores \hat{a}^- e \hat{a}^+ também admitem uma representação em termos de matrizes de Pauli, ou seja,

$$\hat{a}^+ = \frac{1}{2}\sigma_+ \quad (2.57)$$

e

$$\hat{a}^- = \frac{1}{2}\sigma_-, \quad (2.58)$$

em que $\sigma_{\pm} = \sigma_1 \pm i\sigma_2$ e $[\sigma_+, \sigma_-] = 4\sigma_3$, sabendo que,

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad e \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.59)$$

Aplicando (2.53) em (2.52), pode-se obter:

$$\hat{H}_F = \omega_F \left(N_F - \frac{1}{2} \right) \quad (2.60)$$

o espectro de energia é dado por:

$$E_F = \omega_F \left(n_F - \frac{1}{2} \right) \quad (2.61)$$

em que $n_F = 0, 1, 2, \dots$

Em SUSY é interessante considerar [43] a composição da energia pela superposição do oscilador bosônico e fermiônico. Ou seja, a energia E do sistema será dada pela soma de E_B e E_F ,

$$E = \omega \left(n_B + \frac{1}{2} \right) + \omega_F \left(n_F - \frac{1}{2} \right) \quad (2.62)$$

Observando (2.62), percebe-se que se ocorrer uma destruição de um quantum de energia bosônica ($n_B \rightarrow n_B - 1$) e simultaneamente ocorrer uma criação de um quantum de energia fermiônica ($n_F \rightarrow n_F + 1$), ou vice-versa, a energia total do sistema permanecerá inalterada, desde que as frequências naturais fossem definidas como sendo iguais, $\omega = \omega_F$. A essa simetria dá-se o nome de "super-simetria"(SUSY) e o espectro de energia correspondente é dado por:

$$E = \omega (n_B + n_F) \quad (2.63)$$

No estado fundamental ($n_B = n_F = 0$) a energia total é nula e não-degenerada e a SUSY é preservada (não quebra), neste estado não existe contribuição bosônica e nem fermiônica. Observando (2.51) e (2.61), percebe-se que individualmente estes valores de energia são $\frac{\omega}{2}$ para o oscilador bosônico e $\frac{\omega_F}{2}$ para o fermiônico, no estado fundamental, deste modo, percebe-se que estas quantidades são diferentes de zero. No entanto, exceto para o estado fundamental, o espectro (2.63) é duplamente degenerado.

Segue-se também de uma forma bastante trivial que, desde que uma degenerescência SUSY surge por causa da destruição quântica simultânea (ou criação) de um quantum bosônico e criação (ou destruição) de um fermiônico, os geradores correspondentes devem se comportar como $\hat{b}^+\hat{a}^+$ (ou $\hat{b}^+\hat{a}^-$) [42]. Definido operadores chamados de supercarga ou sobrecarga (\hat{Q}^- e \hat{Q}^+) como,

$$\hat{Q}^- = \sqrt{\omega}\hat{b}^- \otimes \hat{a}^+ \quad (2.64)$$

e

$$\hat{Q}^+ = \sqrt{\omega}\hat{b}^+ \otimes \hat{a}^- \quad (2.65)$$

desse modo, a Hamiltoniana pode ser expresso por,

$$\hat{H} = \omega(\hat{b}^+\hat{b}^- + \hat{a}^+\hat{a}^-) = [\hat{Q}^-, \hat{Q}^+]_+ \quad (2.66)$$

e \hat{H} comuta tanto com \hat{Q}^- quanto com \hat{Q}^+ ,

$$[\hat{Q}^-, \hat{H}]_- = [\hat{Q}^+, \hat{H}]_- = 0 \quad (2.67)$$

e ainda,

$$[\hat{Q}^-, \hat{Q}^-]_+ = [\hat{Q}^+, \hat{Q}^+]_+ = 0 \quad (2.68)$$

em que \hat{H} corresponde a uma base no espaço de Hilbert composto por $\hat{H}_B \otimes \hat{H}_F$. De (2.67) pode-se verificar que \hat{Q}^- , \hat{Q}^+ e \hat{H} obedecem entre si uma álgebra que envolve relação de comutação e de anti-comutação, tal álgebra é conhecida como uma álgebra graduada.

Desse modo, estabelece-se que o papel de \hat{Q}^- e \hat{Q}^+ é a de converter um estado bosônico (fermiônica) para um estado fermiônica (bosônico). Do seguinte modo,

$$\hat{Q}^- |n_B, n_F\rangle = \sqrt{\omega n_B} |n_B - 1, n_F + 1\rangle \quad (2.69)$$

$$\hat{Q}^+ |n_B, n_F\rangle = \sqrt{\omega(n_B + 1)} |n_B + 1, n_F - 1\rangle \quad (2.70)$$

Para os casos em que n_F é maior ou igual a zero ($n_F = 1, n_B = 0$) e $n_F = 0, \hat{Q}^+ |n_B, n_F\rangle = 0$ e $\hat{Q}^- |n_B, n_F\rangle = 0$, respectivamente.

para interpretar fisicamente a Hamiltoniana supersimétrica \hat{H} , pode-se utilizar a representação de (2.40), (2.41), (2.57) e (2.58) para os operadores bosônicos e fermiônicos. De (2.66), tem-se:

$$\hat{H} = \frac{1}{2}(\hat{p}^2 + \omega^2\hat{x}^2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\omega\sigma_3 \quad (2.71)$$

Fazendo as operações com os elementos de matriz em (2.71) obtém-se as duas componentes de \hat{H} ,

$$\hat{H}_+ = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}(\omega^2\hat{x}^2 - \omega) \equiv \omega\hat{b}^+\hat{b}^- \quad (2.72)$$

Em termos dos operadores A^- e A^+ a Hamiltoniana \hat{H} pode ser reescrita como,

$$2\hat{H} = \frac{1}{2}[A^-, A^+]_+ \mathbf{I} + \frac{1}{2}\sigma_3[A^-, A^+]_- \quad (2.81)$$

Expressando \hat{H} em termos de uma matriz diagonal, tem-se:

$$\hat{H} \equiv \text{diag}(\hat{H}_-, \hat{H}_+) = \frac{1}{2}\text{diag}(A^-A^+, A^+A^-) \quad (2.82)$$

Na literatura é comum referir-se a \hat{H}_- como o setor fermiônico e \hat{H}_+ como o setor bosônico de H .

2.2.2 Propriedades das Componentes da Hamiltoniana

As componentes \hat{H}_- e \hat{H}_+ da Hamiltoniana SUSY \hat{H} são quase isoespectrais, isto é, possuem espectros de energia similares, ou seja,

$$\hat{H}_+\psi_n^+ = E_n^+\psi_n^+ \quad (2.83)$$

em que,

$$\begin{aligned} \hat{H}_-(A^-\psi_n^+) &= \frac{1}{2}A^-A^+(A^-\psi_n^+) \\ &= A^-\left(\frac{1}{2}A^+A^-\psi_n^+\right) \\ &= E_n^+(A^-\psi_n^+) \end{aligned} \quad (2.84)$$

em que E_n^+ é o espectro de energia de \hat{H}_- . Contudo, $A^-\psi_0^+$ é trivialmente zero desde que ψ_0^+ seja solução do estado fundamental \hat{H}_+ [42], satisfazendo,

$$-(\psi_0^+)'' + (W^2 - W')\psi_0^+ = 0 \quad (2.85)$$

Assumindo assim a seguinte condição,

$$\psi_0^+ = C \exp\left(-\int^x W(y)dy\right), \quad (2.86)$$

em que C é constante.

Conclui-se então que o espectro de \hat{H}_- e \hat{H}_+ são idênticos, exceto para o estado fundamental ($n = 0$), que não é degenerado com a componente \hat{H}_+ de \hat{H} . Este é o caso de SUSY não quebrada (estado de vácuo não degenerado). No caso de quebra espontânea, \hat{H}_+ e \hat{H}_- podem possuir qualquer função de onda não-normalizável no estado fundamental e seus espectros seriam semelhantes, ou seja a não-degenerescência do estado fundamental é perdida. Uma forma

de perceber esta condição é se $W(x)$ for uma função ímpar. Como exemplo, pode-se verificar o caso $W(x) = \omega x$. Por outro lado, se $W(x)$ é uma função par, ou seja, ela mantém o mesmo sinal em $x \rightarrow \pm\infty$, a condição quadrados integráveis pode ser descumprida. Um exemplo típico é $W(x) = x^2$ [42].

De (2.83) e (2.84) pode-se obter os seguintes autovalores de H_{\pm} :

$$\hat{H}_+ \psi_{n+1}^{(+)} = E_{n+1}^{(+)} \psi_{n+1}^{(+)}, \quad (2.87)$$

$$\hat{H}_- \psi_n^{(-)} = E_n^{(-)} \psi_n^{(-)}. \quad (2.88)$$

se $A^- \psi_0^+ = 0$ existe um autoestado normalizável ψ_0 de \hat{H}_+ , então, $\hat{H}_+ \psi_0^+ \equiv \frac{1}{2} A^+ A^- \psi_0^+ = 0$, sabendo que o estado fundamental de \hat{H}_+ possui um autoestado normalizável com o autovalor $E_0^+ = 0$. Desse modo, \hat{H}_- não possui autoestados normalizáveis no estado fundamental.

Os espectros de energia de \hat{H}_+ e \hat{H}_- estão relacionados e utilizando a decomposição (2.82) pode-se inferir a partir de (2.87) e (2.88) as seguintes equações de autovalores:

$$\begin{aligned} \hat{H}_+(A^+ \psi_n^-) &= \frac{1}{2} A^+ A^- (A^+ \psi_n^-) \\ &= A^+ \hat{H}_- \psi_n^- \\ &= E_n^- (A^+ \psi_n^-) \end{aligned} \quad (2.89)$$

$$\begin{aligned} \hat{H}_-(A^- \psi_n^+) &= \frac{1}{2} A^- A^+ (A^- \psi_n^+) \\ &= A^- \hat{H}_+ \psi_n^+ \\ &= E_n^+ (A^- \psi_n^+) \end{aligned} \quad (2.90)$$

Desse modo, o espectro de energia e as funções de onda de \hat{H}_+ e \hat{H}_- [34] são dadas por:

$$E_n^- = E_{n+1}^+, \quad (2.91)$$

com $n = 0, 1, 2, \dots$ e $E_0^+ = 0$.

$$\psi_n^- = (2E_{n+1}^+)^{-\frac{1}{2}} A^- \psi_{n+1}^+, \quad (2.92)$$

$$\psi_{n+1}^+ = (2E_n^-)^{-\frac{1}{2}} A^+ \psi_n^-, \quad (2.93)$$

CAPÍTULO 3

Estados Coerentes

Em 1926, logo após a descoberta da Mecânica Quântica, Schrödinger [7] propôs o conceito do que agora se concebe por "estados coerentes", os quais estariam conectados aos estados clássicos do oscilador harmônico quântico. Segundo [8], Schrödinger investigou a possibilidade de se construir autofunções quânticas, para o OHS (Oscilador Harmônico Simples), com as seguintes características: Estados quânticos descritos por função de onda gaussiana geral (relação de incerteza mínima), com largura gaussiana que descreve o estado fundamental, que tivessem momento linear e energia arbitrária, que seguissem a trajetória de uma partícula clássica no potencial e não mudassem sua forma com o tempo. Mas só na década de 1960 que esses estados foram explorados com mais afinco por Klauder [17], o qual fez uso desses estados ditos quasi-clássicos para verificar a equivalência entre as descrições da mecânica semiclássica e da mecânica quântica de feixes de luz com estatística arbitrária, considerando apenas efeitos lineares. Em 1963 Glauber [18, 19] e Sudarshan [45] descreveram consistentemente a teoria quântica da coerência óptica. Posteriormente, Glauber mostrou que os estados quânticos de um campo de radiação são os autoestados do operador de abaixamento dos quanta do campo eletromagnético, ele também denominou esses estados de coerentes. No decorrer do tempo, vários outros autores exploraram esta temática e desenvolveram formas de obter os Estados Coerentes do OHQ (Oscilador Harmônico Quântico). Em 1985 Klauder e Skagerstam [46] publicaram um livro em que foi catalogada toda a literatura a respeito dos Estados Coerentes e suas aplicações. Mas, sem querer atingir tal nível de detalhamento sobre o tema, far-se-á uma revisão sobre Estados Coerentes, através do algoritmo para sua construção de acordo com a proposta de Zhang [47], o qual descreve tais estados de forma abrangente e didática para um dado sistema físico.

De acordo com Glauber [19], os Estados Coerentes do campo eletromagnético podem ser construídos através de três definições matemáticas:

Definição 1: Os Estados Coerentes, chamados de $|\alpha\rangle$, são autoestados do operador de abaixamento a do Oscilador Harmônico (OH), ou seja: $a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$, em que α é um número complexo.

Definição 2: Os Estados Coerentes, $|\alpha\rangle$, pode ser obtidos através da aplicação do operador deslocamento $D(\alpha)$, definido por: $D(\alpha) = \exp(\alpha a^+ - \alpha^* a^-)$

Definição 3: Os Estados Coerentes $|\alpha\rangle$ são estados quânticos com relação de incerteza mínima.

Como tais estados são funções gaussianas, eles satisfazem a relação de incerteza mínima de Heisenberg. Para verificar tal propriedade é importante que se obtenha o valor esperado da posição \hat{x} e do momento \hat{p}_x da partícula, em termos dos operadores escada \hat{a}^+ e \hat{a}^- .

$$\hat{x} = \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^{\frac{1}{2}} (\hat{a}^+ + \hat{a}^-) \quad (3.1)$$

$$\hat{p}_x = -i \left(\frac{m\hbar\omega}{2}\right)^{\frac{1}{2}} (\hat{a}^- - \hat{a}^+). \quad (3.2)$$

O valor médio de \hat{x} é dado por:

$$\begin{aligned} \langle \hat{x} \rangle_\alpha &= \langle \alpha | \hat{x} | \alpha \rangle \\ &= \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^{\frac{1}{2}} [\langle \alpha | \hat{a}^- | \alpha \rangle + \langle \alpha | \hat{a}^+ | \alpha \rangle] \\ &= \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^{\frac{1}{2}} (\alpha + \alpha^*), \end{aligned} \quad (3.3)$$

em que $(\hat{a}^- | \alpha \rangle)^+ = (\langle \alpha | \hat{a}^+ = \alpha^* | \alpha \rangle)$.

Do mesmo modo, o valor médio de \hat{p}_x pode ser verificado a partir de:

$$\begin{aligned} \langle \hat{p}_x \rangle_\alpha &= \langle \alpha | \hat{p}_x | \alpha \rangle \\ &= -i \left(\frac{m\hbar\omega}{2}\right)^{\frac{1}{2}} [\langle \alpha | \hat{a}^- | \alpha \rangle - \langle \alpha | \hat{a}^+ | \alpha \rangle] \\ &= -i \left(\frac{m\hbar\omega}{2}\right)^{\frac{1}{2}} (\alpha - \alpha^*). \end{aligned} \quad (3.4)$$

De acordo com Sakurai e Griffiths [41, 48]: $n = \hat{a}^+ \hat{a}^-$, $\hat{H} = n + \frac{1}{2}$ e $[\hat{a}^-, \hat{a}^+]_- = 1$. Aplicando essas propriedades respectivamente em (3.3) e em (3.4), pode-se verificar que os valores esperados de \hat{x}^2 e de \hat{p}_x^2 para um Estado Coerente α é:

$$\langle \hat{x}^2 \rangle_\alpha = \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right) [1 + (\alpha + \alpha^*)^2]; \quad (3.5)$$

$$\langle \hat{p}_x^2 \rangle_\alpha = \left(\frac{m\hbar\omega}{2}\right) [1 - (\alpha - \alpha^*)^2]. \quad (3.6)$$

Sabendo-se que:

$$(\Delta \hat{x})_\alpha = [\langle \hat{x}^2 \rangle_\alpha - \langle \hat{x} \rangle_\alpha^2]^{\frac{1}{2}}. \quad (3.7)$$

aplicando (3.3) e (3.5) em (3.7), obtém-se:

$$(\Delta \hat{x})_\alpha = \left(\frac{\hbar}{2m\omega} \right)^{\frac{1}{2}}; \quad (3.8)$$

do mesmo modo,

$$(\Delta \hat{p}_x)_\alpha = [\langle \hat{p}_x^2 \rangle_\alpha - \langle \hat{p}_x \rangle_\alpha^2]^{\frac{1}{2}}, \quad (3.9)$$

substituindo (3.4) e (3.6) em (3.9), obtém-se,

$$(\Delta \hat{p}_x)_\alpha = \left(\frac{m\hbar\omega}{2} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (3.10)$$

Portanto a partir de (3.8) e (3.10), pode-se verificar que a relação de incerteza é dada por:

$$(\Delta \hat{x})_\alpha (\Delta \hat{p}_x)_\alpha = \frac{\hbar}{2}. \quad (3.11)$$

Percebe-se do resultado em (3.11) que a relação de incerteza é independente do tempo, o que significa que o pacote de onda retido é mínimo em qualquer instante, resultando num Estado Coerente com pacotes de onda de dispersão mínima. Segundo Nieto e Simmons [49] as três definições acima citadas levam aos mesmos Estados Coerentes equivalentes para OH.

Segundo Zhang [47], Glauber, considerou fisicamente a fatorização para todas as ordens das funções de correlação do campo eletromagnético através da construção dos Estados Coerentes do campo, utilizando a álgebra do OH. Glauber [19] construiu tais estados a partir das três definições matemáticas acima citadas. Mas pode-se perceber que nem todos os sistemas físicos são contruídos a partir da álgebra do OH, então, é possível, nos dias atuais, generalizar esses estados coerentes do campo eletromagnético para sistemas com propriedades dinâmicas diversas. Como a Hamiltoniana e o espaço de Hilbert completo determinam a dinâmica do sistema quântico, primeiramente, é preciso verificar a estrutura da Hamiltoniana do sistema. Assim, em Óptica Quântica o sistema e o campo eletromagnético pode ser dado por:

$$H = \sum_k \hbar\omega_k a_k^+ a_k^- + \sum_\alpha \epsilon \sigma_0^{(\alpha)} + \sum_{k,\alpha} \gamma_{k\alpha} \left[\frac{\sigma_+^{(\alpha)}}{\sqrt{N}} a_k^- + \frac{\sigma_-^{(\alpha)}}{\sqrt{N}} a_k^+ \right], \quad (3.12)$$

Em que $\hbar\omega_k$ é a energia do campo de modo k , $\gamma_{k\alpha}$ são os coeficientes de acoplamento entre o sistema atômico e o campo eletromagnético, N é o número de átomos, marcado pelo índice α e $\sigma_0^{(\alpha)}$, $\sigma_+^{(\alpha)}$ e $\sigma_-^{(\alpha)}$ são os operadores de "spin", exclusivos para o caso de uma Hamiltoniana para um sistema de dois níveis.

Para obter a devida generalização do sistema, pode-se considerar o coeficiente de acoplamento como uma constante, ou seja, $\gamma_{k\alpha} = \gamma$. Considera-se ainda que os N átomos são fontes

de energia contínua. Portanto, ao calcular a média dos operadores de "spin", obtém-se implicitamente ao resultado, os termos $\lambda_k(t)$ e $\lambda_k^*(t)$. Desse modo, a equação (3.12) reduz-se a:

$$\begin{aligned} H^F &= \sum_k \hbar\omega_k a_k^+ a_k^- + \sum_\alpha \langle \epsilon\sigma_0^{(\alpha)} \rangle + \gamma \sum_{k,\alpha} \left[\frac{\langle \sigma_+^{(\alpha)} \rangle}{\sqrt{N}} a_k^- + \frac{\langle \sigma_-^{(\alpha)} \rangle}{\sqrt{N}} a_k^+ \right] \\ &= \sum_k \hbar\omega_k a_k^+ a_k^- + \sum_k [\lambda_k(t) a_k^+ + \lambda_k^*(t) a_k^-] + cte \\ &= \sum_k H_k^F + cte, \end{aligned} \quad (3.13)$$

em que,

$$H_k^F = \hbar\omega_k a_k^+ a_k^- + \lambda_k(t) a_k^+ + \lambda_k^*(t) a_k^- = H_0 + H_{inter}. \quad (3.14)$$

Na equação (3.14), tem-se a descrição de um sistema óptico tomando como modelo o OH em um campo externo, de modo que, H_0 está relacionado ao campo eletromagnético livre ou OH livre e H_{inter} descreve a interação entre o campo eletromagnético e a fonte externa dependente do tempo.

3.1 Estrutura da Hamiltoniana do Sistema

Para a construção dos Estados Coerentes é preciso verificar a Estrutura da Hamiltoniana do Sistema. Tratando como único modo da Hamiltoniana (3.14), observa-se três propriedades a saber:

(a) A Hamiltoniana (3.14) é uma combinação linear dos operadores de abaixamento \hat{a}^- e de levantamento \hat{a}^+ do OH, em que $\hat{n} = a^+ a^-$ é o operador de número. Desse modo tem-se que os operadores $(\hat{a}^-, \hat{a}^+, \hat{n})$ e o operador unitário I obedecem as seguintes relações de comutação:

$$[\hat{n}, \hat{a}^+] = +\hat{a}^+ \quad (3.15)$$

$$[\hat{n}, I] = 0 \quad (3.16)$$

$$[\hat{n}, \hat{a}^-] = -\hat{a}^- \quad (3.17)$$

$$[\hat{a}^+, I] = 0 \quad (3.18)$$

$$[\hat{a}^-, \hat{a}^+] = +I \quad (3.19)$$

$$[\hat{a}^-, I] = 0 \quad (3.20)$$

Em linguagem de Teoria de grupos, diz-se que os operadores $(\hat{a}^-, \hat{a}^+, \hat{n}, I)$ abrangem a álgebra de Lie, denotado por H_4 , conhecido por grupo de Heisenberg-Weyl [22, 50].

(b) O espaço de Hilbert para o grupo H_4 é gerado por um número de autoestados ($|0\rangle, |1\rangle, \dots, |n\rangle$), em que:

$$\hat{n}|n\rangle = n|n\rangle \quad (3.21)$$

c

$$|n\rangle = \frac{(\hat{a}^+)^n}{(n!)^{1/2}}|0\rangle. \quad (3.22)$$

(c) O Estado Fundamental (estado de vácuo) ocorre quando $n = 0$, ou seja, $|0\rangle$, desse modo, os autoestados de energia de H_0 são dados por:

$$H_0|n\rangle = \hbar\omega n|n\rangle. \quad (3.23)$$

3.2 Construção dos Estados Coerentes

A partir das condições definidas em (a), (b) e (c), pode-se construir os estados coerentes em três etapas a seguir:

1. Zhang [47], chamou esta etapa de subgrupo de estabilidade, pois permite que o estado fundamental se torne invariável. Este subgrupo se aplica a todas as operações h da forma:

$$h = e^{i(\delta\hat{n} + \varphi I)}, \quad (3.24)$$

Para, $n = 0$, então:

$$h|0\rangle = e^{i\varphi}|0\rangle. \quad (3.25)$$

2. Nesta etapa, tem-se o que Zhang [47] chama de espaço lateral, o qual fornece operadores ao subgrupo de estabilidade para que se construa os Estados Coerentes. Para H_4 com o subgrupo de estabilidade, o espaço lateral é o conjunto de elementos Ω que fornecem uma decomposição única para qualquer elemento $g \in H_4$, ou seja, $g = Dh$. Um exemplo de elemento típico de tal espaço é: $D(\alpha) = \exp(\alpha\hat{a}^* - \alpha^*\hat{a})$, em que α é complexo e arbitrário. O argumento do operador exponencial é anti Hermitiano e corresponde a uma transformação no plano complexo ($c \rightarrow c + \alpha$), ou seja, trata-se de um operador deslocamento.

3. Os Estados coerentes são definidos pela ação do espaço lateral sobre o estado fundamental, ou seja,

$$\begin{aligned} g|0\rangle &= D(\alpha)h|0\rangle \\ &= D(\alpha)|0\rangle e^{i\varphi} \\ &= \exp(\alpha\hat{a}^+ - \alpha^*\hat{a}^-)|0\rangle e^{i\varphi} \\ &= e^{\alpha\hat{a}^+} e^{-\alpha^*\hat{a}^-} e^{-\frac{1}{2}[\alpha\hat{a}^+, -\alpha^*\hat{a}^-]}|0\rangle e^{i\varphi}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Mas,

$$\begin{aligned}
 [\alpha \hat{a}^+, -\alpha^* \hat{a}^-] &= \alpha \hat{a}^+ (-\alpha^* \hat{a}^-) - (-\alpha^* \hat{a}^-) \alpha \hat{a}^+ \\
 &= -|\alpha|^2 \hat{a}^+ \hat{a}^- + |\alpha|^2 \hat{a}^- \hat{a}^+ \\
 &= |\alpha|^2 (\hat{a}^- \hat{a}^+ - \hat{a}^+ \hat{a}^-) \\
 &= |\alpha|^2.
 \end{aligned} \tag{3.27}$$

Desse modo, tem-se:

$$\begin{aligned}
 g|0\rangle &= e^{\alpha a^+} e^{-\alpha^* a^-} e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} |0\rangle e^{i\varphi} \\
 &= D(\alpha) |0\rangle e^{i\varphi} \equiv |\alpha\rangle e^{i\varphi}.
 \end{aligned} \tag{3.28}$$

Mas,

$$\begin{aligned}
 e^{-\alpha^* a^-} |0\rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\alpha^* a^-)^n}{n!} |0\rangle \\
 &= |0\rangle.
 \end{aligned} \tag{3.29}$$

Assim, segue que:

$$\begin{aligned}
 g|0\rangle &= e^{\alpha a^+} e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} |0\rangle e^{i\varphi} \\
 &= e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha a^+)^n}{n!} |0\rangle e^{i\varphi} \\
 &= e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)^n (a^+)^n}{n!} |0\rangle e^{i\varphi} \\
 &= e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)^n \sqrt{n!}}{n!} |n\rangle e^{i\varphi} \\
 &= e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle e^{i\varphi} \\
 &= D(\alpha) |0\rangle e^{i\varphi} \equiv |\alpha\rangle e^{i\varphi},
 \end{aligned} \tag{3.30}$$

em que $|\alpha\rangle$ é um Estado Coerente, idêntico ao definido por Glauber. Pode-se perceber que a construção deste estado foi realizada baseando-se em um grupo teórico, mas esse algoritmo também pode ser seguido em caso de uma generalização para a Hamiltoniana pertencente a grupos dinâmicos.

As propriedades dos Estados coerentes do campo eletromagnético podem ser interpretadas para grupos teóricos e seguindo o mesmo raciocínio, podem ser generalizadas. Estas englobam as propriedades e as expansões do espaço de Hilbert, as quais serão analisadas a seguir.

3.3 Propriedades do Espaço de Hilbert

As Propriedades do Espaço de Hilbert são verificadas a partir da Não-Ortogonalidade e da super-completude.

3.3.1 Não-Ortogonalidade

$$\begin{aligned}\langle \alpha | \alpha' \rangle &= e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha')^n}{\sqrt{n!}} e^{-\frac{1}{2}|\alpha'|^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\alpha^*)^m}{\sqrt{m!}} \langle n | m \rangle \\ &= e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} e^{-\frac{1}{2}|\alpha'|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha^* \alpha')^n}{n!}.\end{aligned}\quad (3.31)$$

Mas,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha^* \alpha')^n}{n!} = e^{\alpha^* \alpha'}.\quad (3.32)$$

Desse modo, tem-se:

$$\begin{aligned}\langle \alpha | \alpha' \rangle &= e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} e^{-\frac{1}{2}|\alpha'|^2} e^{\alpha^* \alpha'} \\ &= \exp \left[-\frac{1}{2}|\alpha|^2 - \frac{1}{2}|\alpha'|^2 + \frac{1}{2}\alpha^* \alpha' + \frac{1}{2}\alpha^* \alpha' \right] \\ &= \exp \left[-\frac{1}{2}\alpha \alpha^* - \frac{1}{2}\alpha' \alpha'^* + \frac{1}{2}\alpha^* \alpha' + \frac{1}{2}\alpha^* \alpha' - \frac{1}{2}\alpha \alpha'^* + \frac{1}{2}\alpha \alpha'^* \right] \\ &= \exp \left[-\frac{1}{2}(\alpha \alpha^* + \alpha' \alpha'^* - \alpha^* \alpha' - \alpha^* \alpha' - \alpha \alpha'^* + \alpha \alpha'^*) \right] \\ &= \exp \left[\frac{1}{2}(\alpha^* \alpha' - \alpha \alpha'^*) - \frac{1}{2}(\alpha \alpha^* - \alpha \alpha'^* - \alpha^* \alpha' + \alpha' \alpha'^*) \right] \\ &= \exp \left[\frac{1}{2}(\alpha^* \alpha' - \alpha \alpha'^*) \right] \exp \left[-\frac{1}{2}(|\alpha - \alpha'|^2) \right].\end{aligned}\quad (3.33)$$

Segundo Gerry e Knight [51], pode-se verificar que:

$$\begin{aligned}|\langle \alpha | \alpha' \rangle|^2 &= \exp \left[-\frac{1}{2}|\alpha - \alpha'|^2 + \frac{1}{2}(\alpha^* \alpha' - \alpha \alpha'^*) \right] \exp \left[-\frac{1}{2}|\alpha - \alpha'|^2 + \frac{1}{2}(\alpha \alpha'^* - \alpha^* \alpha') \right] \\ &= \exp(-|\alpha - \alpha'|^2).\end{aligned}\quad (3.34)$$

Pode-se perceber que $|\langle \alpha | \alpha' \rangle|^2 \neq 0$, ou seja, os Estados Coerentes $|\alpha\rangle$ não são ortogonais, mas são normalizáveis.

3.3.2 Super-Compleitude

Para Glauber [19] a Super-Compleitude é a resolução da identidade em termos de Estados Coerentes e não possui solução única. A resolução geral é dada por:

$$\int |\alpha\rangle \frac{d^2\alpha}{\pi} \langle\alpha| = I \quad (3.35)$$

e pode ser demonstrada tomando-se,

$$\alpha = r e^{i\theta}, \quad (3.36)$$

em coordenadas polares, obtêm-se:

$$d^2\alpha = r dr d\theta. \quad (3.37)$$

Substituindo (3.30) em (3.35), obtêm-se:

$$\begin{aligned} \int |\alpha\rangle \langle\alpha| d^2\alpha &= \int e^{-|\alpha|^2} \sum_n \sum_m \frac{(\alpha)^n (\alpha^*)^m}{\sqrt{n!m!}} |n\rangle \langle m| d^2\alpha \\ &= \sum_n \sum_m \frac{|n\rangle \langle m|}{\sqrt{n!m!}} \int_0^\infty e^{-r^2} r^{n+m+1} dr \int_0^{2\pi} e^{i\theta(n-m)} d\theta \\ &= \sum_n \frac{|n\rangle \langle n|}{n!} \int_0^\infty e^{-r^2} r^{2n} r dr 2\pi \delta_{n,m} \\ &= 2\pi \sum_n \frac{|n\rangle \langle n|}{n!} \int_0^\infty e^{-y} y^n \frac{dy}{2} \\ &= 2\pi \sum_n \frac{|n\rangle \langle n| n!}{n! 2} \\ &= \pi. \end{aligned} \quad (3.38)$$

De acordo com Zhang [47], os Estados Coerentes são super completos por possuírem um único índice contínuo em um espaço de Hilbert, com base contável.

3.4 Expansões no Espaço de Hilbert

Pode-se expandir o espaço de Hilbert através de três métodos principais: Escrevendo os Estados Coerentes em termos de estados diagonais, utilizando estados arbitrários expandidos em termos de estados Coerentes e utilizando o método dos operadores gerais em termos dos Estados Coerentes. Segue abaixo a descrição de cada método:

3.4.1 Estados Coerentes em Termos de Estados Diagonais

É o método caracterizado pela expansão dos Estados Coerentes em termos dos autoestados do operador de número (estados de Fock).

$$\begin{aligned}
 |\alpha\rangle &= D(\alpha)|0\rangle \\
 &= \exp\left(-\frac{1}{2}\alpha^*\alpha\right) \sum_0^\infty (\alpha a^+)^n (n!)^{-1} |0\rangle \\
 &= \exp\left(-\frac{1}{2}\alpha^*\alpha\right) \sum_0^\infty (\alpha)^n (n!)^{-\frac{1}{2}} |n\rangle.
 \end{aligned} \tag{3.39}$$

3.4.2 Estados Arbitrários Expandidos em Termos de Estados Coerentes

É um método que utiliza um estado arbitrário $|\psi\rangle$ expresso em termos do estado $|n\rangle$, na forma:

$$|\psi\rangle = \sum_n^n C_n |n\rangle = \sum_n C_n \frac{(a^+)^n}{(n!)^{1/2}} |0\rangle. \tag{3.40}$$

Em que $\sum_n^n |C_n|^2 = 1$. Utilizando a eq.(3.35) é possível expandir $|\psi\rangle$ em termos de Estados Coerentes, dado que:

$$|\psi\rangle = \int |\alpha\rangle \langle\alpha|\psi\rangle \frac{d^2\alpha}{\pi}. \tag{3.41}$$

Como,

$$\begin{aligned}
 \langle\alpha|\psi\rangle &= e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^\infty C_n \frac{(\alpha^*)^n}{\sqrt{n!}} \\
 &= e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} f(\alpha^*).
 \end{aligned} \tag{3.42}$$

Desse modo:

$$|\psi\rangle = \int |\alpha\rangle f(\alpha^*) e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \frac{d^2\alpha}{\pi}, \tag{3.43}$$

onde, $f(\alpha^*) = \sum_{n=0}^\infty C_n \frac{(\alpha^*)^n}{\sqrt{n!}}$.

3.4.3 Método dos Operadores Gerais em Termos de Estados Coerentes

Segundo Klauder e Skagerstam [46], consiste em compreender o operador B da mecânica quântica no domínio dos Estados Coerentes. Tal operador pode ser expresso em termos de elementos de sua matriz conectando os estados quânticos com um número fixo, ainda, segundo

Gerry e Knight [51] Podemos, em condições adequadas, o operador B às vezes é chamado de representação P , de modo que,

$$B = \sum_{n,m} |n\rangle B_{nm} \langle m|. \quad (3.44)$$

A partir da eq.(3.35), pode-se obter:

$$\begin{aligned} B &= \int \int |\alpha\rangle \langle \alpha| B |\alpha'\rangle \langle \alpha'| \frac{d^2\alpha d^2\alpha'}{\pi^2} \\ &= \int \int |\alpha\rangle \langle \alpha| B |\alpha'\rangle \langle \alpha'| \exp\left[\frac{1}{2}|\alpha|^2 + \frac{1}{2}|\alpha'|^2\right] \exp\left[-\frac{1}{2}|\alpha|^2 - \frac{1}{2}|\alpha'|^2\right] \frac{d^2\alpha d^2\alpha'}{\pi^2}. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Em que,

$$\begin{aligned} B(\alpha^*, \alpha') &= \langle \alpha| B |\alpha'\rangle \exp\left[\frac{1}{2}|\alpha|^2 + \frac{1}{2}|\alpha'|^2\right] \\ &= \left\langle \alpha \left| \sum_{n,m} B_{nm} \right| n \right\rangle \langle m|\alpha'\rangle \exp\left[\frac{1}{2}|\alpha|^2 + \frac{1}{2}|\alpha'|^2\right]. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Mas, sabe-se que:

$$\langle \alpha| = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_n (\alpha^*)^n (n!)^{-1/2} \langle n|. \quad (3.47)$$

Então, pode-se obter o Estado Coerente $|\alpha'\rangle$ da seguinte forma:

$$|\alpha'\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha'|^2} \sum_m (\alpha')^m (m!)^{-1/2} |m\rangle. \quad (3.48)$$

De (3.44) e (3.45), obtém-se:

$$B(\alpha^*, \alpha') = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n,m} \sum_n (\alpha^*)^n (n!)^{-1/2} B_{nm} \langle n|n\rangle \quad (3.49)$$

$$\begin{aligned} &e^{-\frac{1}{2}|\alpha'|^2} \sum_m (\alpha')^m (m!)^{-1/2} \langle m|m\rangle \exp\left[\frac{1}{2}|\alpha|^2 + \frac{1}{2}|\alpha'|^2\right] \\ &= \sum_{n,m} B_{nm} (\alpha^*)^n (\alpha')^m (n!m!)^{-1/2}. \end{aligned} \quad (3.50)$$

A função $B(\alpha^*, \alpha')$ determina completamente o operador B e trata-se de uma função analítica de duas variáveis complexas α' e α^* .

Esse operador B , desempenha um papel na distribuição de probabilidade dos Estados Coerentes, esta distribuição pode ser definida como apenas o valor esperado do Estado Coerente. Existem outras distribuições de probabilidade que definem as características quasi-clássicas dos Estados Coerentes na medida em que os estados de descrevem o campo com propriedades próximas ao que seria de esperar para o oscilador clássico de campos coerentes. Certos efeitos,

entre eles sendo quadratura e amplitude (ou número) comprimida, só podem ocorrer para os estados para a qual as funções P são altamente negativas ou singulares. Por esse motivo, o várias formas de comprimir tais estados são conhecidos como efeitos distintamente não clássicos [51], aqui não discutidos.

CAPÍTULO 4

Álgebra de Wigner-Heisenberg

Na década de 1950, Wigner [20] interessou-se em saber se equações do movimento determinam unicamente a relação de comutação dos operadores. Tal indagação o levou a investigar quais as consequências caso as relações de comutação de Heisenberg fossem deformadas. Iniciando esta discussão pela Hamiltoniana do oscilador harmônico, tem-se:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2 \hat{x}^2}{2}. \quad (4.1)$$

Pode-se definir dois operadores não-Hermitianos:

$$\hat{a}^- = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(x + \frac{i\hat{p}}{m\omega} \right), \quad \hat{a}^+ = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(\hat{x} - \frac{i\hat{p}}{m\omega} \right). \quad (4.2)$$

A relação de comutação entre os operadores de levantamento \hat{a}^+ e de abaixamento \hat{a}^- é dada por:

$$[\hat{a}^-, \hat{a}^+]_- = \frac{1}{2\hbar} (-i[\hat{x}, \hat{p}]_- + i[\hat{p}, \hat{x}]_-) = 1. \quad (4.3)$$

Os operadores \hat{a}^- e \hat{a}^+ não comutam, pois $[\hat{x}, \hat{p}]_- = i\hbar$.

Para obter a Hamiltoniana de Wigner, deve-se considerar as unidades ditas naturais, ou seja, $\hbar = m = \omega = 1$. Desse modo, tem-se:

$$\hat{H} = \frac{1}{2}(\hat{x}^2 + \hat{p}^2), \quad (4.4)$$

desse modo, pode-se definir os operadores escada chamados de levantamento (\hat{a}^+) e de abaixamento (\hat{a}^-),

$$\hat{a}^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(i\hat{p} - \hat{x}); \quad (4.5)$$

$$\hat{a}^- = \frac{1}{\sqrt{2}}(-i\hat{p} - \hat{x}), \quad (4.6)$$

de modo que $(\hat{a}^+)^\dagger = \hat{a}^-$. Calculando a relação de anticomutação entre os operadores \hat{a}^- e \hat{a}^+ , tem-se:

$$\begin{aligned} [\hat{a}^-, \hat{a}^+]_+ &= \frac{1}{2} [(-i\hat{p} - \hat{x}), (i\hat{p} - \hat{x})]_+ \\ &= \frac{1}{2} (2\hat{p}^2 + 2\hat{x}^2) \\ &= \hat{p}^2 + \hat{x}^2, \end{aligned} \quad (4.7)$$

assim, por (2.4) - (2.7), pode expressar

$$\hat{H} = \frac{1}{2} [\hat{a}^-, \hat{a}^+]_+. \quad (4.8)$$

Agora, é possível calcular as relações de comutação entre os operadores escada e a Hamiltoniana de Wigner:

$$\begin{aligned} [\hat{H}, \hat{a}^+]_- &= \left[\frac{1}{2} (\hat{a}^- \hat{a}^+ + \hat{a}^+ \hat{a}^-), \hat{a}^+ \right] \\ &= \frac{1}{2} ([\hat{a}^- \hat{a}^+, \hat{a}^+] + [\hat{a}^+ \hat{a}^-, \hat{a}^+]) \\ &= \frac{1}{2} ([\hat{a}^- \hat{a}^+] \hat{a}^+ + \hat{a}^+ [\hat{a}^- \hat{a}^+]) \\ &= \frac{1}{2} (2\hat{a}^+) \\ &= \hat{a}^+, \end{aligned} \quad (4.9)$$

generalizando, tem-se a seguinte equação de movimento de Heisenberg [20].

$$[\hat{H}, \hat{a}^\pm]_- = \pm \hat{a}^\pm. \quad (4.10)$$

De acordo com Yang [52] e Mehta et. al. [27], uma modificação na relação de comutação entre os operadores \hat{a}^+ e \hat{a}^- gera uma nova álgebra sem alterar as equações de movimento já vistas. Fazendo,

$$[\hat{a}^-, \hat{a}^+] = 1 + c\hat{R}, \quad [\hat{x}, \hat{p}] = i(1 + c\hat{R}), \quad (4.11)$$

em que c é uma constante real [52], a qual está relacionada com a energia do estado fundamental $E^{(0)}$ de \hat{H} e \hat{R} é um operador abstrato, Hermitiano e unitário.

Desse modo, valem as seguintes propriedades:

$$\hat{R} = \hat{R}^\dagger = \hat{R}^{-1}; \quad (4.12)$$

$$\hat{R}^2 = 1; \quad (4.13)$$

$$[\hat{R}, \hat{a}^\pm]_+ = 0, \quad [\hat{R}, \hat{H}^\pm]_- = 0. \quad (4.14)$$

De (2.4) e (2.11), verifica-se que:

$$\begin{aligned}
\hat{H} &= \frac{1}{2}(\hat{a}^- \hat{a}^+ + \hat{a}^+ \hat{a}^-) \\
&= \frac{1}{2}(\hat{a}^- \hat{a}^+ + \hat{a}^+ \hat{a}^- + \hat{a}^+ \hat{a}^- - \hat{a}^+ \hat{a}^-) \\
&= \frac{1}{2}(\hat{a}^- \hat{a}^+ - \hat{a}^+ \hat{a}^- + 2\hat{a}^+ \hat{a}^-) \\
&= \hat{a}^+ \hat{a}^- + \frac{1}{2}[\hat{a}^-, \hat{a}^+]_- \\
&= \hat{a}^+ \hat{a}^- + \frac{1}{2}(1 + c\hat{R}), \tag{4.15}
\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
\hat{H} &= \frac{1}{2}(\hat{a}^- \hat{a}^+ + \hat{a}^+ \hat{a}^- + \hat{a}^- \hat{a}^+ - \hat{a}^- \hat{a}^+) \\
&= \frac{1}{2}(\hat{a}^+ \hat{a}^- - \hat{a}^- \hat{a}^+ + 2\hat{a}^- \hat{a}^+) \\
&= \hat{a}^- \hat{a}^+ + \frac{1}{2}[\hat{a}^+, \hat{a}^-]_- \\
&= \hat{a}^- \hat{a}^+ - \frac{1}{2}(1 + c\hat{R}). \tag{4.16}
\end{aligned}$$

O operador abstrato \hat{R} (operador Klein) investigado por Yang [52] é realizado pelo operador de paridade $\pm P$ [52–55].

4.1 Super Realização da álgebra de Wigner- Heisenberg

As relações de comutação (2.7), (2.9), (2.11) e (2.14) formam a álgebra de Wigner- Heisenberg (WH), que também é conhecida como álgebra paraBose [53] para um grau de liberdade.

No capítulo 2, fez-se uma breve introdução sobre os princípios básicos da SUSYQM, de modo a priorizar a familiarização desta linguagem algébrica. Neste momento, far-se-á uso da mesma álgebra, com o diferencial que aqui necessita-se aplicar os conceitos da SUSY à álgebra WH e por isso é necessário todas as passagens matemáticas sejam mais detalhadas.

Segundo Jayaraman e Rodrigues [39], a álgebra WH permite gerar a chamada super-realização, que consiste em obter as coordenadas bosônicas ($x, -id/dx$) e as fermiônicas, representadas pelos operadores (\hat{b}^\pm) que comutam com o setor bosônico e são representados em termos das matrizes de Pauli σ_i , com ($i = 1, 2$ e 3), através das seguintes combinações:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad e \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{4.17}$$

Então, os operadores \hat{b}^\pm são dados por:

$$\begin{aligned}\hat{b}^- &= \sigma_+ = \frac{1}{2}(\sigma_1 + i\sigma_2) = \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \right] \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}\quad (4.18)$$

De (2.18), ainda pode-se obter:

$$(\hat{b}^-)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.19)$$

do mesmo modo, tem-se que:

$$\begin{aligned}\hat{b}^+ &= \sigma_- = \frac{1}{2}(\sigma_1 - i\sigma_2) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (4.20)$$

e

$$(\hat{b}^+)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.\quad (4.21)$$

A relação de anticomutação dos operadores \hat{b}^- e \hat{b}^+ é dada por:

$$\begin{aligned}[\hat{b}^-, \hat{b}^+]_+ &= (\hat{b}^- \hat{b}^+ + \hat{b}^+ \hat{b}^-) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\end{aligned}\quad (4.22)$$

desse modo, tem-se que:

$$[\hat{b}^-, \hat{b}^+]_+ = 1, \quad (4.23)$$

então, o operador de número fermiônico é dado por:

$$\begin{aligned}N_f &= \hat{b}^+ \hat{b}^- = \sigma_- \sigma_+ \\ &= \frac{1}{2}(1 - \sigma_3) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}\quad (4.24)$$

As matrizes de Pauli também podem ser associadas às relações de comutação das coordenadas bosônicas, deste modo pode-se gerar toda a álgebra para o setor bosônico, assim como foi feito para o setor fermiônico. Sabendo-se que:

$$\hat{a}^{\pm} \longrightarrow \hat{a}^{\pm}(c/2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\pm \sigma_1 \frac{d}{dx} \mp \frac{c}{2x} \sigma_1 \sigma_3 - \sigma_1 x \right). \quad (4.25)$$

A partir de (2.8), pode-se fazer:

$$\hat{H}^{\pm} \longrightarrow \hat{H}^{\pm}(c/2) = \frac{1}{2} [\hat{a}^{-}(c/2), \hat{a}^{+}(c/2)]_{+}, \quad (4.26)$$

em que:

$$[\hat{a}^{-}(c/2), \hat{a}^{+}(c/2)]_{+} = \hat{a}^{-}(c/2)\hat{a}^{+}(c/2) + \hat{a}^{+}(c/2)\hat{a}^{-}(c/2). \quad (4.27)$$

Fazendo-se primeiramente $\hat{a}^{-}(c/2)\hat{a}^{+}(c/2)\psi$:

$$\begin{aligned} \hat{a}^{-}(c/2)\hat{a}^{+}(c/2)\psi &= \frac{1}{2} \left(-\sigma_1 \frac{d}{dx} + \frac{c}{2x} \sigma_1 \sigma_3 - \sigma_1 x \right) \left(\sigma_1 \frac{d\psi}{dx} - \frac{c}{2x} \sigma_1 \sigma_3 \psi - \sigma_1 x \psi \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(-\frac{d^2\psi}{dx^2} - \frac{c}{2x^2} \sigma_3 \psi + \psi + x \frac{d\psi}{dx} + \frac{c^2}{4x^2} \psi + \sigma_3 \frac{c}{2} \psi - x \frac{d\psi}{dx} + \sigma_3 \frac{c}{2} \psi + x^2 \psi \right), \end{aligned} \quad (4.28)$$

consequentemente, $\hat{a}^{+}(c/2)\hat{a}^{-}(c/2)\psi$, é dado por:

$$\begin{aligned} \hat{a}^{+}(c/2)\hat{a}^{-}(c/2)\psi &= \frac{1}{2} \left(\sigma_1 \frac{d}{dx} - \frac{c}{2x} \sigma_1 \sigma_3 - \sigma_1 x \right) \left(-\sigma_1 \frac{d\psi}{dx} + \frac{c}{2x} \sigma_1 \sigma_3 \psi - \sigma_1 x \psi \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(-\frac{d^2\psi}{dx^2} - \frac{c}{2x^2} \sigma_3 \psi - \psi - x \frac{d\psi}{dx} + \frac{c^2}{4x^2} \psi - \sigma_3 \frac{c}{2} \psi + x \frac{d\psi}{dx} - \frac{c}{2} \sigma_3 \psi + x^2 \psi \right). \end{aligned} \quad (4.29)$$

De (2.28) e (2.29), obtém-se:

$$\begin{aligned} [\hat{a}^{-}(c/2), \hat{a}^{+}(c/2)]_{+}\psi &= \frac{1}{2} \left(-2 \frac{d^2\psi}{dx^2} - \frac{c}{x^2} \sigma_3 \psi + \frac{c^2}{2x^2} \psi + 2x^2 \psi \right) \\ &= \left(-\frac{d^2\psi}{dx^2} - \frac{c}{2x^2} \sigma_3 \psi + \sigma_3 \frac{c^2}{4x^2} \psi + x^2 \psi \right), \end{aligned} \quad (4.30)$$

assim,

$$[\hat{a}^{-}(c/2), \hat{a}^{+}(c/2)]_{+} = -\frac{d^2}{dx^2} + x^2 + \frac{\sigma_3}{x^2} \left(\frac{c}{2} \right) \left(\sigma_3 \frac{c}{2} - 1 \right) \quad (4.31)$$

Então, $\hat{H}(c/2)$ será dado por:

$$\hat{H}(c/2) = \frac{1}{2} \left[-\frac{d^2}{dx^2} + x^2 + \frac{\sigma_3}{x^2} \left(\frac{c}{2} \right) \left(\sigma_3 \frac{c}{2} - 1 \right) \right]. \quad (4.32)$$

Fazendo uso da matriz de Pauli σ_3 em (2.32), obtém-se a seguinte formação matricial:

$$\hat{H}(c/2) = \begin{pmatrix} \hat{H}_{-}(c/2 - 1) & 0 \\ 0 & \hat{H}_{+}(c/2 + 1) \end{pmatrix}, \quad (4.33)$$

em que:

$$\hat{H}_-(c/2 - 1) = \frac{1}{2} \left[-\frac{d^2}{dx^2} + x^2 + \frac{1}{x^2} \left(\frac{c}{2} - 1 \right) \left(\frac{c}{2} \right) \right] \quad (4.34)$$

e

$$\hat{H}_+(c/2 - 1) = \frac{1}{2} \left[-\frac{d^2}{dx^2} + x^2 + \frac{c}{2x^2} \left(\frac{c}{2} + 1 \right) \right] = \hat{H}_-(c/2). \quad (4.35)$$

De (2.32) verifica-se que o termo de potencial no setor bosônico da Hamiltoniana do Oscilador Isotônico, que equivale ao oscilador harmônico na presença de uma barreira centrífuga é dado por:

$$V_-(c/2 - 1) = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2x^2} \left(\frac{c}{2} - 1 \right) \frac{c}{2}. \quad (4.36)$$

Partindo-se dos operadores escada $\hat{a}^\pm(c/2)$ em (2.25) e da Hamiltoniana de Wigner (2.32), pode-se verificar que suas relações de comutação determinam a álgebra do setor bosônico como já foi citado. Assim, segue:

$$[\hat{H}(c/2), \hat{a}^\pm(c/2)]_- = \frac{1}{2} [\hat{a}^-(c/2)\hat{a}^+(c/2) + \hat{a}^+(c/2)\hat{a}^-(c/2), \hat{a}^\pm(c/2)]_- \quad (4.37)$$

Para facilitar a notação dessa álgebra, considera-se a partir deste ponto: $\hat{a}^\pm(c/2) = \hat{a}^\pm$ e $\hat{H}(c/2) = \hat{H}$, já que todos os cálculos são restritos apenas ao setor bosônico.

Retomando o desenvolvimento da álgebra, far-se-á uso das propriedades das relações de comutação, desse modo, tem-se:

$$\begin{aligned} [\hat{H}, \hat{a}^\pm]_- &= \frac{1}{2} \left([\hat{a}^- \hat{a}^+, \hat{a}^\pm]_- + [\hat{a}^+ \hat{a}^-, \hat{a}^\pm]_- \right) \\ &= \frac{1}{2} (\hat{a}^- \hat{a}^+ \hat{a}^\pm - \hat{a}^\pm \hat{a}^- \hat{a}^+ + \hat{a}^+ \hat{a}^- \hat{a}^\pm - \hat{a}^\pm \hat{a}^+ \hat{a}^-) \\ &= \frac{1}{2} ([\hat{a}^-, \hat{a}^\pm]_- \hat{a}^\pm + \hat{a}^\pm [\hat{a}^-, \hat{a}^\pm]_-). \end{aligned} \quad (4.38)$$

De (2.25), obtém-se:

$$\begin{aligned} [\hat{a}^-, \hat{a}^\pm]_- \psi &= (\hat{a}^- \hat{a}^\pm - \hat{a}^\pm \hat{a}^-) \psi \\ &= \psi + \frac{4\sigma_3 c}{4} \psi \\ &= \psi + \sigma_3 c \psi \\ &= (1 + c\sigma_3) \psi, \end{aligned} \quad (4.39)$$

então,

$$\begin{aligned} [\hat{H}, \hat{a}^\pm]_- &= \frac{1}{2} [(1 + c\sigma_3) \hat{a}^\pm + \hat{a}^\pm (1 + c\sigma_3)] \\ &= \hat{a}^\pm + c\sigma_3 \hat{a}^\pm + \hat{a}^\pm 1 + c\sigma_3. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Neste caso, é necessário conhecer a atuação de σ_3 em \hat{a}^+ e vice-versa:

$$\begin{aligned}\sigma_3 \hat{a}^+ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sigma_3 \sigma_1 \frac{d}{dx} - \frac{c}{2x} \sigma_3 \sigma_1 \sigma_3 - \sigma_3 \sigma_1 x \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\sigma_1 \sigma_3 \frac{d}{dx} + \frac{c}{2x} \sigma_1 \sigma_3 \sigma_3 + \sigma_1 \sigma_3 x \right),\end{aligned}\quad (4.41)$$

do mesmo modo,

$$\hat{a}^+ \sigma_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sigma_1 \sigma_3 \frac{d}{dx} - \frac{c}{2x} \sigma_1 \sigma_3 \sigma_3 - \sigma_1 \sigma_3 x \right), \quad (4.42)$$

então, $\sigma_3 \hat{a}^+ = -\hat{a}^+ \sigma_3$, de forma que:

$$[\hat{a}^+, \sigma_3]_- = 0. \quad (4.43)$$

Retomando (2.40) conclui-se que:

$$[\hat{H}, \hat{a}^+]_- = \hat{a}^+. \quad (4.44)$$

Analogamente:

$$\begin{aligned}[\hat{H}, \hat{a}^-]_- &= \frac{1}{2} ([\hat{a}^- \hat{a}^+ + \hat{a}^+ \hat{a}^-, \hat{a}^-]_-) \\ &= \frac{1}{2} ([\hat{a}^- \hat{a}^+, \hat{a}^-]_- + [\hat{a}^+ \hat{a}^-, \hat{a}^-]_-) \\ &= \frac{1}{2} (\hat{a}^- [\hat{a}^+, \hat{a}^-]_- + [\hat{a}^+ +, \hat{a}^-]_- \hat{a}^-).\end{aligned}\quad (4.45)$$

Partindo do mesmo processo que determinou (2.39), conclui-se que $[\hat{a}^+, \hat{a}^-]_- = -(1 + c\sigma_3)$.

Desse modo,

$$\begin{aligned}[\hat{H}, \hat{a}^-]_- &= -\frac{1}{2} (\hat{a}^- (1 + c\sigma_3) + (1 + c\sigma_3) \hat{a}^-) \\ &= -\frac{1}{2} (\hat{a}^- + c\hat{a}^- \sigma_3 + \hat{a}^- + c\sigma_3 \hat{a}^-).\end{aligned}\quad (4.46)$$

Mas,

$$\begin{aligned}\sigma_3 \hat{a}^- &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\sigma_3 \sigma_1 \frac{d}{dx} + \frac{c}{2x} \sigma_3 \sigma_1 \sigma_3 - \sigma_3 \sigma_1 x \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sigma_1 \sigma_3 \frac{d}{dx} - \frac{c}{2x} \sigma_1 \sigma_3 \sigma_3 + \sigma_1 \sigma_3 x \right)\end{aligned}\quad (4.47)$$

e

$$\hat{a}^- \sigma_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\sigma_1 \sigma_3 \frac{d}{dx} + \frac{c}{2x} \sigma_1 \sigma_3 \sigma_3 - \sigma_1 \sigma_3 x \right) \quad (4.48)$$

então, $\sigma_3 \hat{a}^- = -\hat{a}^- \sigma_3$, caracterizando que:

$$[\hat{a}^-, \sigma_3]_- = 0, \quad (4.49)$$

Desse modo, verifica-se que (2.46) é dada por:

$$[\widehat{H}, \widehat{a}^-]_- = -\frac{1}{2}(2\widehat{a}^-) = -\widehat{a}^-. \quad (4.50)$$

Aplicando (2.5), (2.6) e (2.25) em (2.39), obtém-se:

$$\left[\widehat{x} \longrightarrow \sigma_1 x, \widehat{p} \longrightarrow i\sigma_1 \frac{d}{dx} + \left(\frac{ic}{2x} \right) \sigma_1 \sigma_3 \right]_- = i(1 + c\sigma_3). \quad (4.51)$$

Por analogia é possível perceber que o operador \widehat{R} em (2.11) é substituído por σ_3 em (2.39). Utilizando esta análise em (2.24), obtém-se:

$$\widehat{R} \longrightarrow \sigma_3 = (1 - 2N_f), \quad (4.52)$$

satisfazendo (2.13) e (2.14) e mostrando a consistência da álgebra WH em estudo.

Ainda pode-se verificar as seguintes relações de comutação entre σ_3 e \widehat{H} .

$$\begin{aligned} [\sigma_3, \widehat{H}]_- &= \frac{1}{2}[\sigma_3, \widehat{a}^- \widehat{a}^+ + \widehat{a}^+ \widehat{a}^-] \\ &= \frac{1}{2}[\sigma_3, \widehat{a}^- \widehat{a}^+] + \frac{1}{2}[\sigma_3, \widehat{a}^+ \widehat{a}^-] \\ &= \frac{1}{2}(\sigma_3 \widehat{a}^- \widehat{a}^+ - \widehat{a}^- \widehat{a}^+ \sigma_3) + \frac{1}{2}(\sigma_3 \widehat{a}^+ \widehat{a}^- - \widehat{a}^+ \widehat{a}^- \sigma_3) \\ &= \frac{1}{2}(\sigma_3 \widehat{a}^- \widehat{a}^+ + \widehat{a}^- \sigma_3 \widehat{a}^+ + \sigma_3 \widehat{a}^+ \widehat{a}^- + \widehat{a}^+ \sigma_3 \widehat{a}^-) \\ &= \frac{1}{2}(\sigma_3 \widehat{a}^- \widehat{a}^+ - \sigma_3 \widehat{a}^+ \widehat{a}^- + \sigma_3 \widehat{a}^+ \widehat{a}^- - \sigma_3 \widehat{a}^- \widehat{a}^+) \\ &= [\widehat{H}, \widehat{H}]_- = [\widehat{H}, \sigma_3]_- = 0. \end{aligned} \quad (4.53)$$

Como \widehat{H} e σ_3 comutam, Jayaraman, Rodrigues e em estudo paralelo e independente Plyushchay [39, 40] concluíram que existem autoestados simultâneos para os dois operadores, que neste caso, foram tratados como dois setores (\widehat{H}_- e \widehat{H}_+), vistos na eq. (2.33), da Hamiltoniana de Wigner (\widehat{H}) em (2.32), em que os setores das Hamiltonianas \widehat{H}_- e \widehat{H}_+ pertencem aos subespaços de $\widehat{H}(c/2)$ caracterizados respectivamente pelos autovalores 1 e -1 de σ_3 ou pelo número de férmions (N_f) dado em (2.52), considerando 0 (setor bosônico) e 1 (setor fermiônico), respectivamente. De acordo com [39] esta possibilidade de dividir a hamiltoniana de Wigner em dois setores é comumente chamada de SUSYQM (Supersimetria em Mecânica Quântica). Neste caso, pode-se verificar que para $c = 0$, a relação de comutação generalizada (2.39) retoma à forma vista no Oscilador Harmônico Quântico. Um outro aspecto importante a ser analisado é o sinal da constante c em $\widehat{H}(c/2)$, para tal, verifica-se que para as equações (2.25), (2.32) e (2.39), o operador σ_3 e a constante c estão relacionadas na forma $c\sigma_3$. Deste modo, pode-se es-

tabelecer uma alteração simultânea dos seus sinais, fazendo com que a hamiltoniana de Wigner $\hat{H}(c/2) = \hat{H}(c/2, \sigma_3)$ fique invariável, ou seja:

$$\hat{H}(c/2, \sigma_3) = \frac{1}{2} \left[-\frac{d^2}{dx^2} + x^2 + \frac{1}{x^2} \left(\frac{c}{2} \sigma_3 \right) \left(\frac{c}{2} \sigma_3 - 1 \right) \right]$$

e

$$\begin{aligned} \hat{H}(-c/2, -\sigma_3) &= \frac{1}{2} \left[-\frac{d^2}{dx^2} + x^2 + \frac{1}{x^2} \left(-\frac{c}{2} (-\sigma_3) \right) \left(-\frac{c}{2} (-\sigma_3) - 1 \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[-\frac{d^2}{dx^2} + x^2 + \frac{1}{x^2} \left(\frac{c}{2} \sigma_3 \right) \left(\frac{c}{2} \sigma_3 - 1 \right) \right] \end{aligned} \quad (4.54)$$

Logo, conclui-se que:

$$\hat{H}(c/2, \sigma_3) = \hat{H}(-c/2, -\sigma_3). \quad (4.55)$$

Sabendo que $\sigma_1 \sigma_3 \sigma_1 = -\sigma_3$, tem-se:

$$\hat{H}(-c/2) = \frac{1}{2} \left[-\frac{d^2}{dx^2} + x^2 + \frac{1}{x^2} \left(-\frac{c}{2} \sigma_3 \right) \left(-\frac{c}{2} \sigma_3 - 1 \right) \right].$$

Assim,

$$\hat{H}(-c/2) = \hat{H}(-c/2, \sigma_3). \quad (4.56)$$

Do mesmo modo,

$$\begin{aligned} \sigma_1 \hat{H}(-c/2, -\sigma_3) \sigma_1 &= \frac{1}{2} \left[-\frac{d^2}{dx^2} + x^2 + \frac{1}{x^2} \left(-\frac{c}{2} (-\sigma_1 \sigma_3) \right) \left(-\frac{c}{2} (-\sigma_1 \sigma_3) - 1 \right) \sigma_1 \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[-\frac{d^2}{dx^2} + x^2 + \frac{1}{x^2} \left(-\frac{c}{2} (\sigma_3 \sigma_1 \sigma_1) \right) \left(-\frac{c}{2} (\sigma_3 \sigma_1 \sigma_1) - 1 \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[-\frac{d^2}{dx^2} + x^2 + \frac{1}{x^2} \left(-\frac{c}{2} \sigma_3 \right) \left(-\frac{c}{2} \sigma_3 - 1 \right) \right] \\ &= \hat{H}(-c/2, \sigma_3). \end{aligned} \quad (4.57)$$

Analogamente, obtém-se:

$$\begin{aligned} \sigma_1 \hat{H}(c/2, \sigma_3) \sigma_1 &= \frac{1}{2} \left[-\frac{d^2}{dx^2} + x^2 + \frac{1}{x^2} \left(\frac{c}{2} (\sigma_1 \sigma_3) \right) \left(\frac{c}{2} (\sigma_1 \sigma_3) - 1 \right) \sigma_1 \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[-\frac{d^2}{dx^2} + x^2 + \frac{1}{x^2} \left(\frac{c}{2} (-\sigma_3 \sigma_1 \sigma_1) \right) \left(\frac{c}{2} (-\sigma_3 \sigma_1 \sigma_1) - 1 \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[-\frac{d^2}{dx^2} + x^2 + \frac{1}{x^2} \left(-\frac{c}{2} \sigma_3 \right) \left(-\frac{c}{2} \sigma_3 - 1 \right) \right] \\ &= \hat{H}(-c/2, \sigma_3) = \sigma_1 \hat{H}(-c/2, -\sigma_3) \sigma_1. \end{aligned} \quad (4.58)$$

Desse modo, pode-se verificar que:

$$\begin{aligned}
 \sigma_1 \widehat{H}(c/2) \sigma_1 &= \frac{1}{2} \left[-\frac{d^2}{dx^2} + x^2 + \frac{1}{x^2} \left(\frac{c}{2} \sigma_1 \sigma_3 \right) \left(\frac{c}{2} \sigma_1 \sigma_3 - 1 \right) \sigma_1 \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[-\frac{d^2}{dx^2} + x^2 + \frac{1}{x^2} \left(\frac{c}{2} \sigma_1 \sigma_3 \sigma_1 \right) \left(\frac{c}{2} \sigma_1 \sigma_3 \sigma_1 - 1 \right) \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[-\frac{d^2}{dx^2} + x^2 + \frac{1}{x^2} \left(-\frac{c}{2} \sigma_3 \right) \left(-\frac{c}{2} \sigma_3 - 1 \right) \right] \\
 &= \widehat{H}(-c/2, \sigma_3) = \sigma_1 \widehat{H}(-c/2, -\sigma_3) \sigma_1 \\
 &= \sigma_1 \widehat{H}(c/2, \sigma_3) \sigma_1 = \widehat{H}(-c/2). \tag{4.59}
 \end{aligned}$$

A partir da eq. (2.59) pode-se perceber que atuando à matriz de Pauli (σ_1) em $\widehat{H}(-\frac{c}{2})$ pode-se obter a componente $\widehat{H}(\frac{c}{2})$ as quais se relacionam apenas com a alteração do sinal da constante c , em outras palavras diz-se que elas estão unitariamente ligadas umas às outras. Baseando-se nesta condição pode-se concluir que: $c = |c| > 0$. Toda essa discussão faz-se necessária para que se prossiga com a determinação do estado fundamental $\psi^{(0)}(c/2)$, composta por dois componentes de $\widehat{H}(c/2)$, ou seja,

$$\widehat{H}(c/2) \psi^{(0)}(c/2) = E^{(0)}(c/2) \psi^{(0)}(c/2) \tag{4.60}$$

Com

$$\psi^{(0)}(c/2) = \begin{pmatrix} \psi_I^{(0)}(c/2) \\ \psi_{II}^{(0)}(c/2) \end{pmatrix} \tag{4.61}$$

em que, $\psi_1^{(0)}(c/2)$ e $\psi_2^{(0)}(c/2)$ são os dois componentes que formam o autoestado.

Para determinar o estado fundamental de energia $E^{(0)}$, faz-se necessário tomar uma forma conveniente de $\widehat{H}(c/2)$. Desse modo, utilizando as eqs. (2.26) e (2.39), tem-se:

$$\begin{aligned}
 \widehat{H}(c/2) &= \frac{1}{2} [\widehat{a}^-, \widehat{a}^+]_+ \\
 &= \frac{1}{2} (\widehat{a}^- \widehat{a}^+ + \widehat{a}^+ \widehat{a}^- + \widehat{a}^+ \widehat{a}^- - \widehat{a}^+ \widehat{a}^-) \\
 &= \frac{1}{2} ([\widehat{a}^-, \widehat{a}^+]_- + 2\widehat{a}^+ \widehat{a}^-) \\
 &= \widehat{a}^+ \widehat{a}^- + \frac{1}{2} (1 + c\sigma_3) \tag{4.62}
 \end{aligned}$$

em que $\psi^{(0)}(c/2)$ pode ser singularmente determinado a partir de (2.61) e (2.62) através da condição de abaixamento, fazendo-se uso da forma semipositiva de $\widehat{H}(c/2)$ em (2.26) e dos operadores de levantamento e abaixamento em (2.44).

$$\begin{aligned}\widehat{a}^-(c/2)\psi^{(0)}(c/2) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[-\sigma_1 \frac{d}{dx} + \frac{c}{2x} \sigma_1 \sigma_3 - \sigma_1 x \right] \psi^{(0)}(c/2) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[-\sigma_1 \frac{d}{dx} \psi^{(0)} + \frac{c}{2x} \sigma_1 \sigma_3 \psi^{(0)} - \sigma_1 x \psi^{(0)} \right] = 0\end{aligned}\quad (4.63)$$

Como $\psi^{(0)}(c/2)$ possui duas componentes, é possível escrever as seguintes relações:

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{d}{dx} - \frac{c}{2x} - x \\ -\frac{d}{dx} + \frac{c}{2x} - x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_I^{(0)} \\ \psi_{II}^{(0)} \end{pmatrix} = 0\quad (4.64)$$

$$\begin{cases} -\frac{d}{dx} \psi_{II}^{(0)} - \frac{c}{2x} \psi_{II}^{(0)} - x \psi_{II}^{(0)} = 0 \\ -\frac{d}{dx} \psi_I^{(0)} + \frac{c}{2x} \psi_I^{(0)} - x \psi_I^{(0)} = 0 \end{cases}\quad (4.65)$$

Fazendo uso de recursos computacionais, pode-se obter as seguintes soluções para as equações diferenciais acima citadas:

$$\psi_{II}^{(0)} = C_1 e^{-\frac{x^2}{2}} x^{-\frac{1}{2}|c|}\quad (4.66)$$

$$\psi_I^{(0)} = C_2 e^{-\frac{x^2}{2}} x^{\frac{1}{2}|c|}\quad (4.67)$$

em que (2.66) não é regular na origem e C_1 e C_2 são constantes.

Como C assume valores positivos, apenas $\psi_I^{(0)}$ é fisicamente aceitável, dado que ele é nulo na origem. Analisando o caso de $\psi_{II}^{(0)}$, percebe-se que ele não é definido na origem e é fisicamente descartado, para isso utiliza-se $C_2 = 0$. Desse modo, a função de onda do estado fundamental normalizável é dada por:

$$\psi^{(0)}(c/2) = \begin{pmatrix} \psi_I^{(0)}(c/2) \\ 0 \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} e^{-\frac{x^2}{2}} x^{\frac{1}{2}|c|} \\ 0 \end{pmatrix}\quad (4.68)$$

Esta seleção fisicamente aceitável torna $\psi_I^{(0)}(c/2)$ como única componente normalizável de $\psi^{(0)}(c/2)$ e pode ser comparada com a matriz de pauli σ_3 , ou seja:

$$\begin{aligned}\sigma_3 \psi^{(0)} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_I^{(0)} \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} +\psi_I^{(0)} \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= +\psi_I^{(0)}\end{aligned}\quad (4.69)$$

portanto, pode-se afirmar que possuem a mesma paridade.

A partir de (2.60),(2.61), (2.62) e (2.63), tem-se o autoestado de energia para o setor bosônico a seguir:

$$\begin{aligned} \widehat{H}(c/2)\psi^{(0)}(c/2) &= E^{(0)}\psi^{(0)}(c/2) \\ &= \left[\widehat{a}^+\widehat{a}^- + \frac{1}{2}(1 + c\sigma_3) \right] \psi^{(0)}(c/2) = E^{(0)}\psi^{(0)}(c/2) \\ &= 0 + \frac{1}{2}(1 + c\sigma_3)\psi^{(0)}(c/2) = E^{(0)}\psi^{(0)}(c/2) \\ &= \frac{1}{2}\psi^{(0)}(c/2) + c\sigma_3\psi^{(0)}(c/2) = E^{(0)}\psi^{(0)}(c/2) \end{aligned} \quad (4.70)$$

$$\Rightarrow E^{(0)} = \frac{1}{2}(1 + c) > \frac{1}{2} \quad (4.71)$$

$$\Rightarrow c > 0 \quad (4.72)$$

Partindo dos operadores escada (\widehat{a}^+ e \widehat{a}^-) via eq. (2.38), pode-se obter o espectro completo de energia de $\widehat{H}(c/2)$, de modo que:

$$E^{(n)} = E^{(0)} + n = \frac{1}{2}(1 + c) + n \quad (4.73)$$

com, $n = 0, 1, 2, \dots$

As autofunções do estado excitado de energia $\psi^{(n)}(c/2)$ serão determinadas pelo operador de levantamento \widehat{a}^+ , a partir de $\psi^{(0)}(c/2)$,

$$\psi^{(n)}(c/2) \propto [\widehat{a}^+]^n \psi^{(0)}(c/2) = [\widehat{a}^+]^n \begin{pmatrix} \psi_I^{(0)}(c/2) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.74)$$

Em que $\psi^{(n)}(c/2)$ são as autofunções do n -ésimo nível de energia. Vale salientar que para níveis acima do estado fundamental ($n = 0$), a função $\psi_{II}^{(n)}(c/2)$ não poderá ser desconsiderada, desse modo, tem-se:

$$\psi^{(n)}(c/2) = \begin{pmatrix} \psi_I^{(n)}(c/2) \\ \psi_{II}^{(n)}(c/2) \end{pmatrix} \quad (4.75)$$

Dadas as igualdades abaixo,

$$\sigma_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.76)$$

e

$$\sigma_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4.77)$$

pode-se obter as autofunções $\psi^{(n)}(c/2)$ classificadas por paridade par ou ímpar, em função do parâmetro n . Fazendo $n = 2m$ obtém-se paridade par e para $n = 2m + 1$, paridade ímpar, ($m = 0, 1, 2, \dots$). A escolha da matriz de pauli σ_1 , permite separar os estado excitados de acordo

com a paridade desejada, como foi visto em (2.75) (paridade ímpar) e em (2.76) (paridade par). De modo que:

$$\psi^{(n=2m)}(c/2) = \begin{pmatrix} \psi_I^{(n=2m)}(c/2) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.78)$$

$$\psi^{(n=2m+1)}(c/2) = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_{II}^{(n=2m+1)}(c/2) \end{pmatrix} \quad (4.79)$$

com $m = 0, 1, 2, \dots$

Aplicando as eqs. (2.34) e (2.35), que equivalem aos dois espectros diagonais de $\hat{H}(c/2)$, em seu espectro de energia (2.73), obtêm-se o m -ésimo estado excitado das duas autofunções, respectivamente para o setor bosônico e fermiônico, $\psi_-^{(m)}(\frac{c}{2} - 1)$ e $\psi_+^{(m)}(\frac{c}{2} - 1)$, como também o espectro completo de energia para estas respectivas Hamiltonianas diagonais. Dado que: $\psi_-^{(m)}(\frac{c}{2} - 1) = \psi_I^{(2m)}(\frac{c}{2})$. Sabendo-se que:

$$\hat{H}_- \left(\frac{c}{2} - 1 \right) \psi_-^{(m)} \left(\frac{c}{2} - 1 \right) = E_-^{(m)} \psi_-^{(m)} \left(\frac{c}{2} - 1 \right) \quad (4.80)$$

e

$$\hat{H}_+ \left(\frac{c}{2} - 1 \right) \psi_+^{(m)} \left(\frac{c}{2} - 1 \right) = E_+^{(m)} \psi_+^{(m)} \left(\frac{c}{2} - 1 \right) \quad (4.81)$$

desse modo, se:

$$\begin{pmatrix} \psi_I^{(2m)}(c/2) \\ 0 \end{pmatrix} \propto (\hat{a}_+(c/2))^{(2m)} \psi^{(0)}(c/2) = (\hat{a}_+(c/2))^{(2m)} \begin{pmatrix} \psi_I^{(0)}(c/2) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4.82)$$

então,

$$E_-^{(m)} \left(\frac{c}{2} - 1 \right) = E_-^{(m)}(c/2) + 2m = \frac{1}{2}(1+c) + 2m \quad (4.83)$$

Do mesmo modo,

$$\psi_+^{(m)} \left(\frac{c}{2} - 1 \right) = \psi_{II}^{(2m+1)}(c/2), \quad (4.84)$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \psi_{II}^{(2m+1)}(c/2) \end{pmatrix} \propto (\hat{a}_+(c/2))^{(2m+1)} \psi^{(0)}(c/2) = (\hat{a}_+(c/2))^{(2m+1)} \begin{pmatrix} \psi_I^{(0)}(c/2) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.85)$$

então, tem-se que:

$$E_+^{(m)} = E_+^{(m)} \left(\frac{c}{2} - 1 \right) = E_+^{(2m+1)}(c/2) + 2m + 1 = E_+^{(0)}(c/2) + 2m + 1 = \frac{1}{2}(1+c) + 2m + 1 \quad (4.86)$$

para $m = 0, 1, 2, \dots$

De acordo com Jayaraman e Rodrigues [39], os casos em que $c < 0$ e $c > 0$ relacionam-se através de uma transformação unitária. Então, pode-se dizer que o espectro de energia é o mesmo para ambos os casos. Para que se possa identificar os setores bosônico e fermiônico da Hamiltoniana de Wigner em um sistema físico, como visto em (2.80) e (2.81), é necessário

fazer uma escolha conveniente para a constante c , fazendo a análise da ação dos operadores escada sobre as autofunções de Wigner. Sabe-se que:

$$\hat{a}^{\pm}(c/2) |n\rangle = C_n^{\pm} |n \pm 1\rangle \quad (4.87)$$

Desse modo, pode-se fazer:

$$\langle n | \hat{a}^{\mp}(c/2) a^{\pm}(c/2) |n\rangle = |C_n^{\pm}|^2 \langle n \pm 1 | n \pm 1\rangle \quad (4.88)$$

Então, a ação dos operadores escada para cada setor em questão será determinada alterando apenas o valor de n em cada caso. De (2.62), obtém-se:

$$\hat{a}^{\mp}(c/2) a^{\pm}(c/2) \mp 1/2\sigma_3(\sigma_3 + c) \quad (4.89)$$

$$\hat{a}^{+}(c/2) a^{-}(c/2) + 1/2\sigma_3(\sigma_3 + c) \quad (4.90)$$

$$\hat{a}^{-}(c/2) a^{+}(c/2) - 1/2\sigma_3(\sigma_3 + c) \quad (4.91)$$

Assim, de (2.89), (2.62), (2.73) e sabendo que $\hat{H} |n\rangle = E^{(n)} |n\rangle$, tem-se:

$$\begin{aligned} \langle n | \hat{a}^{-} a^{+} |n\rangle &= \langle n | \left[\hat{H}(c/2) + \frac{1}{2}\sigma_3(\sigma_3 + c) \right] |n\rangle \\ &= \langle n | \hat{H}(c/2) |n\rangle + \langle n | \frac{1}{2}(1 + c\sigma_3) |n\rangle \\ &= E^{(0)} + n + \frac{1}{2}(1 + c) \\ &= 1 + c + n \end{aligned} \quad (4.92)$$

Para $n = 2m$, (2.92) resulta em:

$$\langle n | \hat{a}^{-} a^{+} |n\rangle = 1 + c + 2m \quad (4.93)$$

Seguindo o mesmo raciocínio do caso anterior, obtém-se para $n = 2m + 1$:

$$\begin{aligned} \langle n | \hat{a}^{-} a^{+} |n\rangle &= \langle n | \left[\hat{H}(c/2) + 1/2\sigma_3(+\sigma_3 c) \right] |n\rangle \\ &= \langle n | \hat{H}(c/2) |n\rangle + \langle n | 1/2(1 + c\sigma_3) |n\rangle \\ &= E^{(0)} + n + 1/2(1 - c) \\ &= \frac{1}{2}(1 + c) + 2m + 1 + \frac{1}{2}(1 - c) \\ &= 2m + 1 + 1 \\ &= 2(m + 1) \end{aligned} \quad (4.94)$$

Do mesmo modo, a atuação de $\langle n | \hat{a}^+ a^- | n \rangle$, para $n = 2m$ resulta em:

$$\begin{aligned} \langle n | \hat{a}^+ a^- | n \rangle &= \langle n | \left[\hat{H}(c/2) - 1/2\sigma_3(1 + \sigma_3 c) \right] | n \rangle \\ &= \langle n | \hat{H}(c/2) | n \rangle + \langle n | 1/2(1 + c\sigma_3) | n \rangle \\ &= E^{(0)} + n + 1/2(1 - c) \\ &= \frac{1}{2}(1 + c) + 2m - \frac{1}{2}(1 + c) \\ &= 2m \end{aligned} \tag{4.95}$$

Finalmente, no caso em que $n = 2m + 1$, obtém-se:

$$\begin{aligned} \langle n | \hat{a}^+ a^- | n \rangle &= \langle n | \left[\hat{H}(c/2) - 1/2\sigma_3(1 + \sigma_3 c) \right] | n \rangle \\ &= \frac{1}{2}(1 + c) + 2m + 1 - \frac{1}{2}(1 + c) \\ &= 2m + 1 + c \end{aligned} \tag{4.96}$$

Pode-se, por sua vez, determinar os coeficientes C_n para cada atuação dos operadores escada sobre as autofunções de Wigner. De (2.87) e (2.89), tem-se que $|C_n^+|^2 = 1 + c + 2m$. Assim,

$$|C_n^+| = \sqrt{1 + c + 2m}, \tag{4.97}$$

com $n = 2m$.

De (2.87) e (2.90) pode-se verificar que $|C_n^+|^2 = 2(m + 1)$. Logo,

$$|C_n^+| = \sqrt{2(m + 1)}, \tag{4.98}$$

para $n = 2m + 1$.

De (2.88) e (2.93), tem-se que $|C_n^-|^2 = 2m$, assim,

$$|C_n^-| = \sqrt{2m}, \tag{4.99}$$

no caso em que $n = 2m$.

De (2.88) e (2.95), tem-se que $|C_n^-|^2 = 2m + 1 + c$, assim,

$$|C_n^-| = \sqrt{2m + 1 + c}, \tag{4.100}$$

se $n = 2m + 1$.

Aplicando (2.97), (2.98), (2.99) e (2.100) em (2.88), respectivamente, obtém-se a atuação dos operadores escada sobre um estado n definido em cada caso abaixo:

$$\hat{a}^+(c/2) | n \rangle = \sqrt{2m + 1 + c} | n + 1 \rangle \tag{4.101}$$

para $n = 2m$.

$$\hat{a}^+(c/2) |n+1\rangle = \sqrt{2(m+1)} |n+2\rangle \quad (4.102)$$

em que $n = 2m + 1$

$$\hat{a}^-(c/2) |n\rangle = \sqrt{2m} |n-1\rangle \quad (4.103)$$

dado que $n = 2m$

$$\hat{a}^-(c/2) |n\rangle = \sqrt{2m+1+c} |n-1\rangle \quad (4.104)$$

com $n = 2m + 1$

Note que as autofunções $|2m+1\rangle$ e $|2m-1\rangle$ pertencem ao autoespaço associado aos quantas pares $|2m\rangle$, ao passo que $|2m+2\rangle$ e $|2m\rangle$, pertencem aos ímpares $|2m+1\rangle$. Ou seja, houve uma inversão do autoespaço sob a ação dos operadores escada, pois estes são definidos sob multiplicação da matriz de Pauli σ_1 . Como pode-se observar na demonstração a seguir:

$$\sigma_1 \psi^{(n=2m)} = \sigma_1 \begin{pmatrix} \psi_I^{(2m)}(c/2) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_I^{(2m)}(c/2) \end{pmatrix} \quad (4.105)$$

A discussão seguinte trata das relações de comutação dos operadores escada para o setor bosônico de $\hat{H}(c/2)$, definidos por [29].

De (2.44) e (2.50), tem-se que $[\hat{H}(c/2), \hat{a}^\pm(c/2)]_- = \pm \hat{a}^\pm(c/2)$. Desse modo, segue que:

$$\begin{aligned} [\hat{H}(c/2), (\hat{a}^\pm(c/2))^2]_- &= [\hat{H}(c/2), \hat{a}^\pm(c/2)\hat{a}^\pm(c/2)]_- \\ &= [\hat{H}(c/2), \hat{a}^\pm(c/2)]_- \hat{a}^\pm(c/2) + \hat{a}^\pm(c/2) [\hat{H}(c/2), \hat{a}^\pm(c/2)]_- \\ &= \pm 2[\hat{a}^\pm(c/2)]_+^2 \end{aligned} \quad (4.106)$$

então, $\frac{1}{2}(1 + \sigma_3)[\hat{H}(c/2), (\hat{a}^\pm(c/2))^2]_- = \pm(1 + \sigma_3)[\hat{a}^\pm(c/2)]_+^2$. Como ,

$$\left(\frac{1 + \sigma_3}{2}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.107)$$

então, pode-se considerar a seguinte situação: $\left(\frac{1+\sigma_3}{2}\right) [\hat{H}, (\hat{a}^-)^2]_- = \left(\frac{1+\sigma_3}{2}\right) (\hat{H}(\hat{a}^-)^2 - (\hat{a}^-)^2 \hat{H})$, mas,

$$\left(\frac{1 + \sigma_3}{2}\right) \hat{H}(\hat{a}^-)^2 - \left(\frac{1 + \sigma_3}{2}\right) (\hat{a}^-)^2 \hat{H} = - \left(\frac{1 + \sigma_3}{2}\right) 2(\hat{a}^-)^2 \quad (4.108)$$

Pelo lado esquerdo, tem-se:

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} \hat{H}_- & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} (\hat{a}^-)^2 - \left(\frac{1+\sigma_3}{2}\right) \hat{a}^- \hat{a}^- \hat{H} &= \hat{H}_- \left(\frac{1+\sigma_3}{2}\right) \hat{a}^- \hat{a}^- - \begin{pmatrix} A_{(-)}^- & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \hat{a}^- \hat{H} \\
 &= \hat{H}_- \begin{pmatrix} A_{(-)}^- & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \hat{a}^- - A_{(-)}^- \left(\frac{1+\sigma_3}{2}\right) \hat{a}^- \hat{H} \\
 &= \hat{H}_- A_{(-)}^- \left(\frac{1+\sigma_3}{2}\right) \hat{a}^- - A_{(-)}^- \begin{pmatrix} A_{(+)}^- & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \hat{H} \\
 &= \hat{H}_- A_{(-)}^- A_{(+)}^- \left(\frac{1+\sigma_3}{2}\right) - A_{(-)}^- A_{(+)}^- \hat{H}_- \left(\frac{1+\sigma_3}{2}\right) \\
 &= \hat{H}_- B^- \left(\frac{1+\sigma_3}{2}\right) - B^- \hat{H}_- \left(\frac{1+\sigma_3}{2}\right). \quad (4.109)
 \end{aligned}$$

Do mesmo modo, pelo lado direito, tem-se que $-(\frac{1+\sigma_3}{2}) 2(\hat{a}^-)^2 = -2B^- (\frac{1+\sigma_3}{2})$. Assim, verifica-se a igualdade $\hat{H}_- B^- (\frac{1+\sigma_3}{2}) - B^- \hat{H}_- (\frac{1+\sigma_3}{2}) = -2B^- (\frac{1+\sigma_3}{2})$, a qual pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} \hat{H}_- B^- & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} B^- \hat{H}_- & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -2B^- & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} [\hat{H}_-, B^-]_- & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.110)
 \end{aligned}$$

generalizando, tem-se que:

$$\left[\hat{H}_- \left(\frac{c}{2} - 1\right), B^- \left(\frac{c}{2} - 1\right) \right]_- = \pm 2B^\pm \left(\frac{c}{2} - 1\right) \quad (4.111)$$

Vale observar que todos os operadores aqui citados são definidos em função de $(c/2)$ e que: $A_{(-)}^- = A^-(-c/2)$ e $A_{(+)}^- = A^+(c/2)$, como também, $A_{(-)}^+ = A^+(-c/2)$ e $A_{(+)}^+ = A^+(c/2)$. Os operadores $B^\pm(c/2)$ são operadores escada não-hermitianos que atuam no autoespaço do setor bosônico, provocando um aumento ou redução de dois em dois quantas de energia como é visto em (2.108). Pode-se, ainda, verificar que:

$$A^{(\pm)}(\pm(c/2)) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\pm \frac{d}{dx} \pm \frac{c}{2x} - x \right), \quad (4.112)$$

em que, $(A^+)^\dagger = A^-$.

Analogamente, obtém-se:

$$B^-(c/2) = A^-(-c/2)A^-(c/2) = \frac{1}{2} \left(\frac{d^2}{dx^2} + x^2 - \frac{c}{2x^2} \left(\frac{c}{2} - 1\right) - 2x \frac{d}{dx} + 1 \right), \quad (4.113)$$

e ainda observa-se que:

$$B^+(c/2) = A^+(c/2)A^+(-c/2) = \frac{1}{2} \left(\frac{d^2}{dx^2} + x^2 - \frac{c}{2x^2} \left(\frac{c}{2} - 1 \right) - 2x \frac{d}{dx} - 1 \right). \quad (4.114)$$

A partir de (2.113) e (2.114), percebe-se que:

$$(B^-(c/2))^\dagger = (A^-(-c/2)A^-(c/2))^\dagger = A^+(c/2)A^+(-c/2) = B^+(c/2).$$

e que,

$$\left[B^-\left(\frac{c}{2} - 1\right), B^+\left(\frac{c}{2} - 1\right) \right]_- = 4H_-\left(\frac{c}{2} - 1\right). \quad (4.115)$$

Por fim, deve-se verificar a atuação desses novos operadores $B^\pm(c/2)$ no estado de energia $\psi_{(-)}$, para que se possa construir os autoestados de energia do setor bosônico. Resultando em:

$$B^\pm(c/2)\psi_-^{(m)}(c/2) = d_m^\pm \psi_-^{(m\pm 1)}(c/2), \quad (4.116)$$

em que $\psi_-^{(m)}(c/2)$ é o autoespaço associado aos quantas pares e $\psi_-^{(m\pm 1)}(c/2)$ está associado aos quantas ímpares. sendo assim, faz-se necessário calcular os autovalores d_m^\pm . De (2.103) e (2.104), observa-se que:

$$(\hat{a}^-(c/2))^2 |2m\rangle = \sqrt{2m} \hat{a}^- |2m - 1\rangle. \quad (4.117)$$

Fazendo $2m - 1 = 2(m - 1) + 1$, tem-se:

$$\begin{aligned} (\hat{a}^-(c/2))^2 |2m\rangle &= \sqrt{2m} \sqrt{2(m - 1) + 1 + c} |2(m - 1) + 1 - 1\rangle. \\ &= \sqrt{(2m)(2m - 1 + c)} |2m - 2\rangle \end{aligned} \quad (4.118)$$

Sabe-se que:

$$\frac{1}{2}(1 + \sigma_3)(\hat{a}^-(c/2))^2 |2m\rangle = \sqrt{(2m)(2m - 1 + c)} \frac{1}{2}(1 + \sigma_3) |2m - 2\rangle \quad (4.119)$$

e

$$\frac{1}{2}(1 + \sigma_3)\hat{a}^-(c/2) = \frac{1}{2}(1 + \sigma_3)A^-(c/2)\sigma_1, \quad (4.120)$$

como foi mostrado na eq. (2.112). Com isso,

$$\left(\frac{1 + \sigma_3}{2} \right) (\hat{a}^-(c/2))^2 = A^-(c/2)A^+(-c/2) \left(\frac{1 + \sigma_3}{2} \right) = B^-(c/2) \left(\frac{1 + \sigma_3}{2} \right), \quad (4.121)$$

de (2.119) e (2.121):

$$\begin{aligned} B^-(c/2) \left(\frac{1 + \sigma_3}{2} \right) \psi^{(2m)}(c/2) &= \begin{pmatrix} B^-(c/2) \psi^{(m)} \left(\frac{c}{2} - 1 \right) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} d_m^- \psi_-^{(m-1)} \left(\frac{c}{2} - 1 \right) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sqrt{(2m)(2m-1+c)} \psi_-^{(m-1)} \left(\frac{c}{2} - 1 \right) \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.122)$$

$$\implies d_m^- = \sqrt{(2m)(2m-1+c)} \quad (4.123)$$

Seguindo o mesmo raciocínio, de (2.101) e (2.102), tem-se:

$$\begin{aligned} (\hat{a}^+(c/2))^2 |2m\rangle &= \sqrt{1+c+2m} \hat{a}^+ |2m+1\rangle \\ &= \sqrt{1+c+2m} \sqrt{2(m+1)} |2m+3\rangle \end{aligned} \quad (4.124)$$

Então, pode-se afirmar que:

$$\left(\frac{1 + \sigma_3}{2} \right) (\hat{a}^+(c/2))^2 |2m\rangle = \sqrt{2(m+1)(2m+1+c)} |2m+3\rangle. \quad (4.125)$$

Logo,

$$d_m^+ = \sqrt{2(m+1)(2m+1+c)}. \quad (4.126)$$

Aplicando (2.123) e (2.126) em (2.116), tem-se:

$$\begin{cases} B^-(c/2) \psi_-^{(m)} \left(\frac{c}{2} - 1 \right) = \sqrt{2m(2m-1+c)} \psi_-^{(m-1)} \left(\frac{c}{2} - 1 \right) \\ B^+(c/2) \psi_-^{(m)} \left(\frac{c}{2} - 1 \right) = \sqrt{2(m+1)(2m+1+c)} \psi_-^{(m+1)} \left(\frac{c}{2} - 1 \right) \end{cases} \quad (4.127)$$

A eq. (2.128) traduz a atuação dos operadores escada $B^-(c/2)$ e $B^+(c/2)$ em um estado $\psi_-^{(m)} \left(\frac{c}{2} - 1 \right)$, de modo que, obtém-se todas as informações dos autoestados do setor bosônico referentes à Hamiltoniana de Wigner.

CAPÍTULO 5

Estados Coerentes para o Oscilador Isotônico

Os Estados Coerentes Canônicos (ECC) para o potencial $V_- \left(\frac{c}{2} - 1 \right)$ dado em (2.36), são definidos como autoestados do operador abaixamento $B^- \left(\frac{c}{2} - 1 \right)$:

$$B^- \left(\frac{c}{2} \right) \left| \chi, \frac{c}{2} - 1 \right\rangle = \chi \left| \chi, \frac{c}{2} - 1 \right\rangle, \quad (5.1)$$

em que $B^- \left(\frac{c}{2} \right)$ é um operador diferencial de segunda ordem e não - Hermitiano, definido por (2.113) e os autovalores χ podem assumir valores complexos.

Pode-se escrever os Estados Coerentes como uma expansão dos autoestados da hamiltoniana de Wigner $H_- \left(\frac{c}{2} - 1 \right)$, ou seja,

$$\left| \chi, \frac{c}{2} - 1 \right\rangle = \sum_{m=0}^{\infty} C_m \left| \Psi_-^{(m)} \left(\frac{c}{2} - 1 \right) \right\rangle. \quad (5.2)$$

De (2.126), (4.1) e (4.2), obtém-se:

$$B^- \left(\frac{c}{2} \right) \left| \chi, \frac{c}{2} - 1 \right\rangle = \sum_{m=0,1}^{\infty} C_m [2m(2m + c - 1)]^{1/2} \left| \Psi_-^{(m-1)} \left(\frac{c}{2} - 1 \right) \right\rangle, \quad (5.3)$$

fazendo $s = m - 1$ e por conseguinte $m = s + 1$, tem-se:

$$B^- \left(\frac{c}{2} \right) \left| \chi, \frac{c}{2} - 1 \right\rangle = \sum_{s=0}^{\infty} C_{s+1} [2(s+1)(2s+1+c)]^{1/2} \left| \Psi_-^{(s)} \left(\frac{c}{2} - 1 \right) \right\rangle, \quad (5.4)$$

Tomando-se o índice de soma igual a m , (4.4) pode ser reescrita como,

$$B^- \left(\frac{c}{2} \right) \left| \chi, \frac{c}{2} - 1 \right\rangle = \sum_{m=0}^{\infty} C_{m+1} [2(m+1)(2m+1+c)]^{1/2} \left| \Psi_-^{(m)} \left(\frac{c}{2} - 1 \right) \right\rangle. \quad (5.5)$$

Agora, de (4.1) e (4.2), segue,

$$B^-\left(\frac{c}{2}\right)\left|\chi, \frac{c}{2} - 1\right\rangle = \sum_{m=0}^{\infty} C_m \chi \left|\Psi_{-}^{(m)}\left(\frac{c}{2} - 1\right)\right\rangle. \quad (5.6)$$

De (4.3) e (4.4), obtém-se:

$$\sum_{m=0}^{\infty} C_{m+1} [2(m+1)(2m+1+c)]^{1/2} \left|\Psi_{-}^{(m)}\left(\frac{c}{2} - 1\right)\right\rangle = \sum_{m=0}^{\infty} C_m \chi \left|\Psi_{-}^{(m)}\left(\frac{c}{2} - 1\right)\right\rangle, \quad (5.7)$$

logo,

$$\frac{C_{m+1}}{C_m} = \frac{\chi}{[2(m+1)(2m+1+c)]^{1/2}}, \quad (5.8)$$

então,

$$C_m = \frac{\chi}{[2m(2m+c-1)]^{1/2}} C_{m-1}, \quad (5.9)$$

ou seja,

$$C_{m-1} = \frac{\chi}{[2m-2(2m-2+c-1)]^{1/2}} C_{m-2}, \quad (5.10)$$

de (4.9), tem-se:

$$C_{m-1} = \frac{[2m(2m+c-1)]^{1/2}}{\chi} C_m. \quad (5.11)$$

Aplicando (4.11) em (4.10), segue que:

$$C_m \frac{[2m(2m+c-1)]^{1/2}}{\chi} = \frac{\chi}{[2m-2(2m-2+c-1)]^{1/2}} C_{m-2}, \quad (5.12)$$

então,

$$C_m = \frac{\chi^2}{[2m(2m+c-1)2(m-1)(2m+c-3)]^{1/2}} C_{m-2}. \quad (5.13)$$

Assim, pode-se inferir que:

$$C_{m-1} = \frac{\chi^2}{[2(m-1)2(m-2)(2m+c-3)(2m+c-5)]^{1/2}} C_{m-3}, \quad (5.14)$$

aplicando (4.11) em (4.14), tem-se:

$$C_m \frac{[2m(2m+c-1)]^{1/2}}{\chi} = \frac{\chi^2}{[2(m-1)2(m-2)(2m+c-3)(2m+c-5)]^{1/2}} C_{m-3}, \quad (5.15)$$

desse modo,

$$C_m = \frac{\chi^3}{[2^3 m(m-1)(m-2)(2m+c-1)(2m+c-3)(2m+c-5)]^{1/2}} C_{m-3}, \quad (5.16)$$

generalizando,

$$C_m = \frac{\chi^n}{2^{n/2} [m!(2m+c-1)(2m+c-3)(2m+c-5)\dots(2m+c-2-n)]^{1/2}} C_{m-n}. \quad (5.17)$$

Fazendo $m=n$ observa-se que:

$$\begin{aligned} C_m &= \frac{\chi^m}{2^{m/2} [m!(2m+c-1)(2m+c-3)(2m+c-5)\dots(m+c-2)]^{1/2}} C_0 \\ &= C_0 \left(\frac{\chi}{2}\right)^m \left(\frac{1}{2}\right)^{1/2} [m!(m+\Omega-1)(m+\Omega-2)(m+\Omega-3)\dots(\Omega)]^{-1/2}, \end{aligned} \quad (5.18)$$

em que $\Omega = \frac{c+1}{2}$.

Segundo Arfken e Weber [56], (4.18) comporta-se como uma função gama incompleta (Γ), do tipo:

$$C_m = C_0 \left(\frac{\chi}{2}\right)^m \sqrt{\frac{\Gamma(\frac{c+1}{2})}{m!\Gamma(m+\frac{c+1}{2})}}. \quad (5.19)$$

Os Estados Coerentes para o Oscilador isotônico serão obtidos aplicando-se (4.19) em (4.2), de modo que:

$$\left|\chi, \frac{c}{2} - 1\right\rangle = C_0 \left[\Gamma\left(\frac{c+1}{2}\right)\right]^{1/2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\chi}{2}\right)^m}{[m!\Gamma(m+\frac{c+1}{2})]^{1/2}} \left|\Psi_{-}^{(m)}\left(\frac{c}{2} - 1\right)\right\rangle. \quad (5.20)$$

A condição de normalização para os Estados obtidos em (4.20) é dada por:

$$\left\langle\chi, \frac{c}{2} - 1\left|\chi, \frac{c}{2} - 1\right\rangle = \frac{|C_0(\chi)|^2}{\Gamma^{-1}\left(\frac{c+1}{2}\right)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\chi}{2}\right)^{2m}}{m!\Gamma(m+\frac{c+1}{2})} = 1. \quad (5.21)$$

De acordo com Machado [57] uma função de Bessel modificada possui a seguinte configuração:

$$I_{\mu}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\mu}}{m!\Gamma(m+\mu+1)}. \quad (5.22)$$

Nessas circunstâncias, pode-se reescrever (4.21) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} C_0(\chi) &= \Gamma^{-1/2}\left(\frac{c+1}{2}\right) \left[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\chi}{2}\right)^{2m+\frac{c-1}{2}}}{m!\Gamma(m+\frac{c+1}{2}+1)}\right]^{-1/2} \left(\frac{\chi}{2}\right)^{\frac{c-1}{4}} \\ &= \Gamma^{-1/2}\left(\frac{c+1}{2}\right) \left(\frac{\chi}{2}\right)^{\frac{c-1}{4}} I_{\frac{c-1}{2}}^{-1/2}(\chi). \end{aligned} \quad (5.23)$$

Aplicando-se (4.23) em (4.20), obtém-se:

$$\left| \chi, \frac{c}{2} - 1 \right\rangle = \left[\Gamma \left(\frac{c+1}{2} \right) I_{\left(\frac{c-1}{2}\right)}(\chi) \right]^{-1/2} \left(\frac{\chi}{2} \right)^{\frac{c-1}{4}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\chi}{2} \right)^m}{[m! \Gamma(m + \frac{c+1}{2})]^{1/2}} \left| \Psi_-^{(m)} \left(\frac{c}{2} - 1 \right) \right\rangle. \quad (5.24)$$

Uma vez determinados, os Estados Coerentes de Wigner (ECW), tal qual os Estados Coerentes do Oscilador Harmônico, obedecem as três propriedades a saber: Não - Ortogonalidade, Super-Completude e Relação de Incerteza mínima. Essas características dos ECW são importantes para que se possa comparar o novo resultado encontrado com os Estados Coerentes do Oscilador Harmônico já conhecido e trabalhado no capítulo 3. Essas comparações serão utilizadas para fins de discussão a posteriori.

5.1 Não-Ortogonalidade

Desse modo, a propriedade de Não-Ortogonalidade é dada por:

$$\langle \chi', \frac{c}{2} - 1 | \chi, \frac{c}{2} - 1 \rangle = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\chi' \chi}{4} \right)^m}{m! \Gamma(m + \frac{c+1}{2}) \Gamma(\frac{c+1}{2}) \left(\frac{\chi}{2} \right)^{\frac{c-1}{4}} \left(\frac{\chi'}{2} \right)^{\frac{c-1}{4}} I_{\left(\frac{c-1}{2}\right)}^{1/2}(\chi) I_{\left(\frac{c-1}{2}\right)}^{1/2}(\chi')}. \quad (5.25)$$

5.2 Super-Completude

Para que se determine a relação de Super-Completude dos ECC assume-se inicialmente que deve existir uma função peso, tal que:

$$\int |\chi, \frac{c}{2} - 1\rangle \langle \chi, \frac{c}{2} - 1| S(|\chi|^2) \frac{d^2 \chi}{\pi} = 1, \quad (5.26)$$

em que, $d^2 \chi = (d \operatorname{Re} \chi)(d \operatorname{Im} \chi)$. Seguindo os mesmos passos de (3.36) e (3.37), verifica-se que: $\chi = |\chi| e^{i\theta}$ e $d\chi = |\chi| d|\chi| d\theta$, em coordenadas polares. Desse modo, verifica-se que:

$$\begin{aligned} & \int |\chi, \frac{c}{2} - 1\rangle \langle \chi, \frac{c}{2} - 1| d^2 \chi \\ &= \sum_{m, m'} \int_0^{\infty} |\chi| d|\chi| \int_0^{2\pi} d\theta \frac{|\chi|^{m+m'} e^{i\theta(m-m')}}{2^{m+m'} [m'! m! \Gamma(m + \bar{l}) \Gamma(m' + \bar{l})]^{1/2} K} \left| \Psi_-^{(m)}(l) \right\rangle \left\langle \Psi_-^{(m')}(l) \right|, \end{aligned} \quad (5.27)$$

com, $l = \frac{c}{2} - 1$, $l'' = \frac{1-c}{2}$, $\bar{l} = \frac{c+1}{2}$, $l' = \frac{c-1}{2}$ e $K = \Gamma(\bar{l}) I_{l'}(\chi) \left(\frac{\chi}{2} \right)^{l''}$.

Mas, $\int_0^{2\pi} d\theta e^{i\theta(m-m')} = 2\pi \delta_{m, m'}$, então,

$$\int |\chi, l\rangle \langle \chi, l| d^2 \chi = 2\pi \sum_{m, m'} \delta_{m, m'} \int_0^{\infty} d|\chi| \frac{|\chi|^{(m+m'+1)} K^{-1}}{2^{m+m'} [m'! m! \Gamma(m + \bar{l}) \Gamma(m' + \bar{l})]^{1/2}} \left| \Psi_-^{(m)}(l) \right\rangle \left\langle \Psi_-^{(m')}(l) \right|. \quad (5.28)$$

Definindo:

$$f(|\chi|^2, l) \equiv \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\chi}{2}\right)^{2m} \Gamma\left(\frac{c+1}{2}\right)}{m! \Gamma\left(m + \frac{c+1}{2}\right)} = \left(\frac{\chi}{2}\right)^{\frac{1-c}{2}} I_{\left(\frac{c-1}{2}\right)}(\chi) \Gamma\left(\frac{c+1}{2}\right). \quad (5.29)$$

E sabendo-se que:

$$\langle \Psi_{-}^{(m)}(l) | \Psi_{-}^{(s)}(l) \rangle = \delta_{m,s} \quad (5.30)$$

De (4.26) e (4.28 - 4.30), obtem-se:

$$\begin{aligned} 1 &= \int |\chi, \frac{c}{2} - 1\rangle \langle \chi, \frac{c}{2} - 1| S(|\chi|^2) \frac{d^2\chi}{\pi} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2^{1-2m}}{m! \Gamma\left(m + \frac{c+1}{2}\right)} \int_0^{\infty} S(|\chi|^2) d|\chi| |\chi|^{2m+1} f^{-1}(|\chi|^2, l) |\Psi_{-}^{(m)}(l)\rangle \langle \Psi_{-}^{(m)}(l)| \end{aligned} \quad (5.31)$$

Multiplicando (4.31) da direita para esquerda pelo ket $|\Psi_{-}^{(s)}(l)\rangle$ e da esquerda para direita pelo bra $\langle \Psi_{-}^{(s)}(l)|$, tomando $x = |\chi|^2$, $|\chi|d|\chi| = \frac{dx}{2}$ e sabendo que $s = 0, 1, 2, \dots$, obtém-se:

$$\int_0^{\infty} f^{-1}(x, l) \frac{x^m}{m!} S(x) dx = \Gamma\left(m + \frac{c+1}{2}\right) 2^{2m}. \quad (5.32)$$

Fazendo-se uma soma em ambos os lados de (4.32) e incrementando uma fase (iy) nos termos que estão elevados a m , obtém-se:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} f^{-1}(x, l) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(iyx)^m}{m!} S(x) dx &= \sum_{m=0}^{\infty} \Gamma\left(m + \frac{c+1}{2}\right) (4iy)^m \\ &= \int_0^{\infty} f^{-1}(x, l) e^{ixy} S(x) dx = N(y), \end{aligned} \quad (5.33)$$

pois, $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(x)^m}{m!} = e^x$.

A série $N(y)$ dada em (4.33) é convergente para $|y| < 1$ e divergente para $|y| > .1$. Considerando que ela é bem comportada, de modo que se possa definir uma transformada de Fourier inversa de (4.32), tem-se:

$$\int_0^{\infty} T(x) e^{ixy} dx = N(y), \quad (5.34)$$

com,

$$T(x) = f^{-1}(x, l) S(x). \quad (5.35)$$

Multiplicando ambos os lados de (4.34) por $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix'y} dy$, e admitido-se que pode-se trocar as integrais, obtém-se:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} T(x) dx \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{x-x'} dy &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} N(y) e^{-ix'y} dy \\ &= \int_0^{\infty} T(x) dx \delta(x-x') = T(x'), \end{aligned} \quad (5.36)$$

pois, segundo Arfken e Weber [56], $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{x-x'} dy$ é resolvida através da derivação da função delta de Dirac, que resulta em $\delta(x-x')$. Vale salientar que $0 < x' < \infty$.

Desse modo,

$$T(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} N(y) e^{-ixy} dy. \quad (5.37)$$

De (4.35) e (4.37), obtém-se:

$$S(x) = \frac{1}{2\pi} f(x, l) \int_{-\infty}^{+\infty} N(y) e^{-ixy} dy, \quad (5.38)$$

Esta função está em acordo com a encontrada por Sudarshan, Sharma e Mehta [26].

A propriedade de Super-Completude dos ECC de Wigner $|\chi, \frac{c}{2} - 1\rangle$, é obtida fazendo $d\mu(|\chi|^2) = S(|\chi|^2) d^2\chi$. Desse modo, obtém-se:

$$\frac{1}{\pi} \int |\chi, \frac{c}{2} - 1\rangle \langle \chi, \frac{c}{2} - 1| d\mu(|\chi|^2) = 1, \quad (5.39)$$

A relação de Super-Completude define um espaço completo, ou seja, qualquer vetor no espaço de Hilbert pode ser escrito nesta base. O caráter probabilístico dos campos quânticos é importante para definir o espaço completo. É possível associar probabilidade aos estados quânticos escritos numa base desejada, uma vez que a sua Completude é garantida. Desse modo, pode-se verificar a probabilidade de um estado através de uma medida de Haar, a qual, segundo , é definida como sendo A partir da relação de Super-completude, pode-se definir a probabilidade desses ECC, através de uma medida de Haar, a qual é definida, segundo Haar [58], em análise matemática, como sendo uma forma de atribuir um volume invariante para subconjuntos de grupos localmente compactos e em seguida definir uma integral para funções nestes grupos. A integral de Haar é definida por:

$$\int_G f(sx) d\mu x = \int_G f(x) d\mu x, \quad (5.40)$$

para qualquer função integrável f . Isto é obtido imediatamente pelas funções escalonadas, sendo essencialmente a definição da variante esquerda e μ é a medida esquerda de Haar. Existe toda uma teoria que gira em torno dessa análise matemática que foge do escopo deste trabalho,

sendo importante, verificar o comportamento da integral de Haar para obter a probabilidade da relação de Super-Compleitude do ECC de Wigner obtidos. Desse modo, de (4.32), obtém-se:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_0^{\infty} f^{-1}(x, l) e^{ixy} S(x) dx &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} N(y) dy \\
 &= \int_0^{\infty} f^{-1}(x, l) S(x) dx \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ixy}}{2\pi} dy \\
 &= \int_0^{\infty} f^{-1}(x, l) S(x) dx \delta(x) \\
 &= \frac{S(0)}{f(0, l)}, \tag{5.41}
 \end{aligned}$$

então, $S(0) = f(0, l) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} N(y) dy$.

5.3 Relação de Incerteza

No capítulo 3 foi definida a relação de incerteza de Heisenberg, equação (3.11), para Estados Coerentes do Oscilador Harmônico a partir dos valores médios quadráticos e dos valores esperados da posição \hat{x} e do momento \hat{p}_x em função dos operadores de levantamento \hat{a}^+ e de abaixamento \hat{a}^- geradores dos Estados Coerentes $|\alpha\rangle$.

No início deste capítulo foram obtidos os Estados Coerentes do setor bosônico para o oscilador isotônico. Fazendo uma breve retrospectiva, verifica-se que na seção 4.1 foi realizada a relação de não ortogonalidade e na seção 4.2 for obtida a Super-Compleitude para esses estados. Por fim, é preciso observar a relação de incerteza para os estados em questão.

De acordo com a álgebra de Wigner (capítulo 2), não foram obtidos os valores de \hat{x} e \hat{p}_x em função dos operadores escada para o setor bosônico $\hat{B}^- \left(\frac{c}{2} - 1\right)$ e $\hat{B}^+ \left(\frac{c}{2} - 1\right)$, (2.113) e (2.114), respectivamente. Desse modo, uma opção para obter essas relações de mínima incerteza é adotar as analogias propostas por Jayarama, Rodrigues e Vaidya [59] para o caso dos Estados Coerentes de Wigner SUSY (supersimétricos) e por Sharma, Mehta e Sudarshan [26], para o caso dos Estados Coerentes ParaBose, que seguem a mesma estrutura algébrica para o caso dos Estados Coerentes do setor bosônico do oscilador isotônico definidos em (4.24). Então, de acordo com [26] obtém-se:

$$\hat{X} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\hat{B}^- \left(-\frac{c}{2} - 1 \right) + \hat{B}^+ \left(\frac{c}{2} - 1 \right) \right) \tag{5.42}$$

e

$$\hat{P} = -\frac{i}{\sqrt{2}} \left(\hat{B}^- \left(-\frac{c}{2} - 1 \right) - \hat{B}^+ \left(\frac{c}{2} - 1 \right) \right). \tag{5.43}$$

Segundo [29], pode-se escrever os operadores de quadratura \hat{X} e \hat{P} em termos dos operadores B^\pm , dados por:

$$B^\mp = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mp i\hat{P} - \hat{X}). \quad (5.44)$$

A relação de comutação entre os operadores de quadratura é dada por:

$$[\hat{X}, \hat{P}]_- = 4iH_- \quad (5.45)$$

A relação de mínima incerteza para os estados $|\chi, \frac{c}{2} - 1\rangle$ com igual dispersão para \hat{X} e \hat{P} é dada por:

$$B^-|\chi, \frac{c}{2} - 1\rangle = \chi|\chi, \frac{c}{2} - 1\rangle \quad (5.46)$$

e

$$\chi = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\langle\hat{X}\rangle + i\langle\hat{P}\rangle\right). \quad (5.47)$$

De (4.46) e (4.47), obtém-se:

$$\hat{X}^2 = \frac{1}{2}\left((B^-)^2 + (B^+)^2 + 2B^+B^- + 4H_-\right) \quad (5.48)$$

e

$$\hat{P}^2 = -\frac{1}{2}\left((B^-)^2 + (B^+)^2 - 2B^+B^- + 4H_-\right) \quad (5.49)$$

Os valores esperados para os Estados Coerentes do oscilador Isotônico são dados por:

$$\langle\hat{X}\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\chi^* + \chi) = -\sqrt{2}Re(\chi), \quad (5.50)$$

$$\langle\hat{X}^2\rangle = 2[Re(\chi)]^2 + 2\langle H_- \rangle, \quad (5.51)$$

$$\langle\hat{P}\rangle = -\frac{i}{\sqrt{2}}(\chi^* - \chi) = \sqrt{2}Im(\chi), \quad (5.52)$$

$$\langle\hat{P}^2\rangle = 2[Im(\chi)]^2 + 2\langle H_- \rangle. \quad (5.53)$$

Em que,

$$\langle H_- \rangle = \langle\chi|H_-|\chi\rangle = |\chi|\frac{I_{(l-\frac{1}{2})}(|\chi|)}{I_{(l+\frac{1}{2})}(|\chi|)} + \frac{1}{2} - l, \quad (5.54)$$

com $l = \frac{c}{2} - 1$.

A variância da quadratura do operador \hat{X} $\left(\left(\Delta\hat{X}\right)^2 = \langle\hat{X}^2\rangle - \langle\hat{X}\rangle^2\right)$ e da quadratura do operador \hat{P} $\left(\left(\Delta\hat{P}\right)^2 = \langle\hat{P}^2\rangle - \langle\hat{P}\rangle^2\right)$ são iguais para os Estados Coerentes $|\chi, l\rangle$.

A função de Bessel modificada dada na equação (4.22), para $x \gg 1$, pode ser reescrita da seguinte forma:

$$I_n(x) \approx \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} \left(1 - \frac{4n^2 - 1}{8x} + \frac{(4n^2 - 1)(4n^2 - 3^2)}{2!(8x)^2} + \dots \right). \quad (5.55)$$

De (4.50 - 4.53) a relação de mínima incerteza para $|\chi| \gg 1$, $l = \frac{1}{2}$ e $l = 0$, respectivamente é dada por:

$$\Delta \hat{X} \Delta \hat{P} = |\chi|, \quad (5.56)$$

$$\Delta \hat{X} \Delta \hat{P} = |\chi| + \frac{1}{2}. \quad (5.57)$$

Desse modo, Rodrigues, et.al. [29] encontrou as variâncias da nova posição e momento:

$$\langle (\Delta \hat{X}) \rangle = 2 \langle H_- \rangle = \langle (\Delta \hat{P}) \rangle \quad (5.58)$$

Assim, a relação de incerteza mínima é dada por:

$$(\Delta \hat{X})(\Delta \hat{P}) = 2|\chi| \left| \frac{I_{l-\frac{1}{2}}(|\chi|)}{I_{l+\frac{1}{2}}(|\chi|)} + 1 - 2l \right|. \quad (5.59)$$

Como pode-se perceber a relação de incerteza para as novas quadraturas é igual ao módulo do valor esperado da Hamiltoniana do setor bosônico [29]. Pode-se observar também, do resultado (4.59) que tais quadraturas dos Estados Coerentes do setor bosônico para Oscilador Isotônico possuem uma relação de mínima incerteza.

Gerando os gráficos $(\Delta \hat{X})(\Delta \hat{P})$ para dois valores particulares de l pode-se verificar nas figuras I e II que as quadraturas satisfazem a relação de comutação (4.45). De acordo com a figura I, verifica-se que para determinados valores l a relação de incerteza mínima tende a zero, ou seja, nesses pontos específicos, é possível verificar os autoestados da posição ou do momento da partícula.

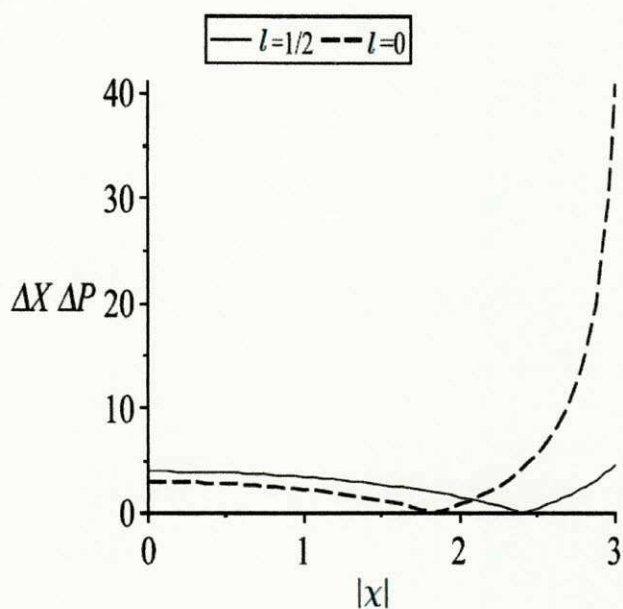


Fig.I: Relação de mínima incerteza para os Estados Coerentes do Oscilador Isotônico, dado por (4.54) e (4.59), para $l = \frac{1}{2}$ e $l = 0$.

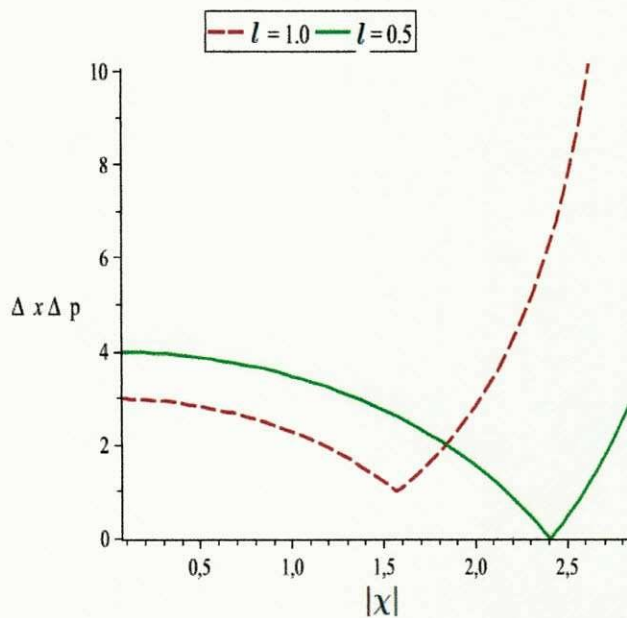


Fig.II: Relação de mínima incerteza para os Estados Coerentes do Oscilador Isotônico, com $l = \frac{1}{2}$.

CAPÍTULO 6

Conclusão

Este trabalho buscou analisar a álgebra de Wigner-Heisenberg a partir da Hamiltoniana do Oscilador Harmônico Quântico, modificando a relação de comutação entre os operadores escada. Ao atribuir as novas relações de comutação entre tais operadores, obteve-se a Hamiltoniana do oscilador isotônico. Aplicando a matriz de Pauli, σ_3 , sobre a Hamiltoniana do novo Oscilador, Jayaraman e Rodrigues [39] calcularam suas coordenadas bosônicas $\hat{H}_- \left(\frac{\epsilon}{2} - 1\right)$, na equação (2.34), e fermiônicas $\hat{H}_+ \left(\frac{\epsilon}{2} - 1\right)$, na equação(2.35), como também, as relações de comutação entre a Hamiltoniana de Wigner e os operadores escada (2.44) e (2.50) e entre a nova Hamiltoniana e a matriz de Pauli σ_3 em (2.53). Todos esses procedimentos os levaram a determinar o espectro de energia (2.73) e os autoestados de energia para as coordenadas bosônicas e fermiônicas em (2.80) e (2.81), respectivamente.

Verificando o comportamento das coordenadas bosônicas, Rodrigues. et. al. [29] observou-se seu potencial $V_- \left(\frac{\epsilon}{2} - 1\right)$ em (2.36). Neste sentido, foram verificados os novos operadores de levantamento B^+ e de abaixamento B^- para o setor bosônico da Hamiltoniana de Wigner $\left(\hat{H}_- \left(\frac{\epsilon}{2} - 1\right)\right)$, como também a relação de comutação entre eles na equação (2.115).

Os Estados Coerentes do Oscilador isotônico foram definidos como sendo autoestados do operador de abaixamento e foram chamados de $|\chi, \frac{\epsilon}{2} - 1\rangle$, daí, foram analisadas suas principais propriedades: Não-Ortogonalidade, super-Completo e relação de mínima incerteza. A partir da obtenção dessas propriedades para os Estados Coerentes do Oscilador Isotônico, verifica-se que todas elas obedecem às propriedades determinadas por Glauber para os Estados Coerentes do Oscilador harmônico, ou seja, são estados não ortogonais e possuem um estado super-completo, o qual permite que qualquer estado seja escrito na base dos Estados Coerentes do Oscilador Isotônico. A relação de mínima incerteza também mostrou-se compatível com os resultados obtidos por Glauber [18, 19], graficamente essa nova relação mostrou que para determinadas intensidades da barreira centrífuga l , a mínima incerteza vai para zero, denotando que atinge-se autoestados da posição ou do momento. Os operadores escada $B^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mp i\hat{P} - \hat{X})$ e a Hamiltoniana do Oscilador Isotônico satisfazem a álgebra de Lie em (2.111) e em (2.115) [22, 29].

Este trabalho não contemplou as estatísticas desses Estados Coerentes do Oscilador Isotônico, de modo que, esse tema será estudado em uma continuação desta pesquisa. Essas estatísticas devem fornecer informações sobre as características quasi-clássicas desses estados, já que até onde se sabe ele obedece todas as propriedades dos Estados Coerentes do Oscilador Harmônico. Sugere-se que sejam obtidos, em trabalhos futuros, as distribuições de probabilidade P e Q, como também o fator de Mandel, de Fano, suas respectivas medidas de correlação, dentre outros, para que se obtenha todas as informações probabilísticas, de modo a fechar todas as análises para os Estados Coerentes do Oscilador Isotônico. É importante verificar que experimentalmente esses estados podem ser testados para que se analise a natureza da luz emitida e se ela pode ser tratada adequadamente de modo a gerar um laser e qual(is) a(s) sua(s) aplicação(ões).

Embora tenhamos tratado principalmente do oscilador isotônico, pode-se obter resultados similares para qualquer sistema físico radial e oscilante para N-dimensões pela substituição Hermitiana $-i \frac{d}{dx} \rightarrow -i \left(\frac{d}{dr} + \frac{N-1}{2r} \right)$ e a deformação do parâmetro de Wigner seria dada por $l + 1 \rightarrow l_N + \frac{1}{2}(N - 1)$, em que $l_N = 0, 1, 2, \dots$ é um oscilador de momento angular para N-dimensões. Conjectura-se que é possível, também construir Estados Coerentes para moléculas diatômicas com a interação Davidson [60], como é o caso do átomo de Hidrogênio [61]. O espectro de energia e as autofunções para tais moléculas podem ser calculados algebricamente pelo método de fatorização de Wigner-Heisenberg.

É possível perceber que o estudo dos Estados Coerente via álgebra de Wigner-Heisenberg abre muitas outras possibilidades de pesquisa, tanto para a Física teórica como para a experimental, mas é evidente que todas essas propostas devem ser analisadas com afinco para que, se possível, num futuro próximo se obtenha uma contribuição concreta para a Óptica Quântica e o estudo dos lasers.

Referências Bibliográficas

- [1] GLAUBER, R. J. One hundred years of light quanta. *ChemPhysChem*, v. 7, p. 1618–1639, 2006.
- [2] PLANCK, M. Entropic und temperatur strahlender wärme. *Annalen der Physik*, v. 1, p. 719, 1900.
- [3] EISTEIN, A. Über einen die erzeugung und verwandlung des lichtet betreffenden heuristischen gesichtspunkt. *Annalen der Physik*, v. 17, p. 132, 1905.
- [4] DIRAC, P. The quantum theory of the emission and absorption of radiation. *Proc. Roy. Soc.*, A114, p. 710, 1927.
- [5] POPPER. *Quantum Theory and the Schism in Physics*. [S.l.]: Hutchinson, 1982.
- [6] CHIBENI, S. S. Implicações filosóficas da microfísica. *cadernos de História e Filosofia da Ciência*, v. 3, p. 141–164, 1992.
- [7] SCHRÖDINGER, E. The constant crossover of micro-to macro mechanics. *Naturwissenschaften*, v. 14, p. 664–666, 1926.
- [8] RODRIGUES, R. de L.; JÚNIOR, D. F.; BATISTA, S. M. Estados coerentes em mecânica quântica. *CBPF*, v. 068/01, p. 01–23, 2001.
- [9] WEBER, J. Amplification of microwave radiation by substances not thermal equilibrium. *IRE Trans. Prof Group on Electron Devices*, v. 3, p. 1, 1953.
- [10] GORDON, J. P.; ZEIGER, H. J.; TOWNES, C. H. Molecular microwave oscillator and new hyperfine structure in the microwave spectrum of nh₃. *Physics Review*, v. 95, p. 282, 1954.
- [11] GORDON, J. P.; ZEIGER, H. J.; TOWNES, C. H. The maser - new type of microwave amplifier, frequency standard, and spectrometer. *ibid*, v. 99, p. 1264, 1955.
- [12] BASOV, N. G.; PROKHOROV, A. M. Aplications of molecular beams of the radio spectroscopic study of the rotation spectrum of molecules. *J. Expt Theoret Phys.*, v. 27, p. 431, 1954.

-
- [13] BASOV, N. G.; PROKHOROV, A. M. On the possible methods of producing active molecules for a molecular generator. *ibid*, v. 28, p. 249, 1955.
- [14] SCHAWLOW, A. L.; TOWNES, C. H. Infrared and optical maseres. *Phy*, v. 112, p. 1940, 1958.
- [15] MAIMAN, T. H. Stimulated optical radiation in ruby. *Nature*, v. 187, p. 493, 1960.
- [16] YARIV, A. *Quantum Eletronics*. [S.l.]: John Wilwy & Sons, 1975.
- [17] KLAUDER, J. R. The action option and a feynman quantization of spinor fields in terms of ordinary c-numbers. *Ann. Physics*, v. 11, p. 123, 1960.
- [18] GLAUBER, J. R. Coherent and incoherent states of the radiation field. *Physics Review*, v. 131, p. 2766–2788, 1963c.
- [19] GLAUBER, R. J. The quantum theory of optical coherence. *Physics Review*, v. 130, p. 2529–2539, 1963b.
- [20] WIGNER, E. P. Do the equations of motion determine the quantum mechanical commutation relations? *Physics Review*, v. 77, p. 711–712, 1950.
- [21] KRIVCHENKOV, I. I. G. an V. D. *Problems in Quantum Mechanics*. [S.l.]: Pergamon, 1961.
- [22] PERELOMOV, A. *Generalized Coherent States and Their Aplications*. [S.l.]: Springer-Verlag, 1986.
- [23] POLYCHRONAKOS, A. P. Calogero-like systems: physics and mathematics. *Phys*, v. 69, p. 703, 1992.
- [24] BARUT, A. O.; GIRARDELLO, L. New "coherent" states associated with non-compact groups". *Commun. Math. Phys.*, v. 21, p. 41, 1971.
- [25] DODONOV, V. V.; MALKIN, I. A.; MAN'KO, V. I. Even and odd coherent states and excitations of a singular oscillator. *Physica*, v. 72, p. 597, 1974.
- [26] SUDARSHAN, E. C. G.; SHARMA, J. K.; METHA, C. L. Para-bose coherent states. *Mathematical Physics*, v. 19, p. 2089–2094, 1978.
- [27] MEHTA, S. J. K.; MUKUNDA, C. L. N.; SUDARSHAN, E. C. G. Representations and properties of parabose oscillator operators. i. energy position and momentum eigenstates. *J. Math. Phys.*, v. 21, p. 2386, 1980.
- [28] MEHTA, S. J. K.; MUKUNDA, C. L. N.; SUDARSHAN, E. C. G. Representation and properties of para-bose oscillator operators. ii. coherent states and the minimum uncertainty states. *J. Math. Phys.*, v. 22, p. 78, 1981.

- [29] RODRIGUES, R. de L. et al. New hermitian quadrature operators from two-particle calogero interaction. In: *1º Encontro de Física Teórica da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro*. [S.l.: s.n.], 2011.
- [30] GENDENSHTEIN, L.; KRIVE, I. Supersymmetry in quantum mechanics. *Sov. Phys. Usp.*, v. 28, p. 645, 1985.
- [31] LAHIRI, A.; ROY, P.; BAGCHI, B. *Int. J. Mod. Phys.*, A5, p. 1383, 1990.
- [32] LEVAI, G. Lecture notes in physics. *Springer*, v. 427, p. 127, 1993.
- [33] ROY, B.; ROY, P.; ROYCHOUDHURY, R. *Fortsch Phys.*, v. 39, p. 211, 1991.
- [34] COOPER, F.; KHARE, A.; SUKHATME, U. *Phys. Rep.*, v. 251, p. 267, 1995.
- [35] JUNKER, G. *Supersymmetric Methods in Quantum and Statistical Physics*. [S.l.]: Springer, 1996.
- [36] SHIFMAN, M. A. Itep lectures on particle physics and field theory. *World Scientific*, v. 62, p. 301, 1999.
- [37] RAMOND, P. Dual theory for free fermions. *Physics Review*, D3, p. 2415, 1971.
- [38] NEVEU, A.; SCHWARZ, J. H. Factorizable dual model of pions. *Nuclear Physics*, B31, p. 86, 1971.
- [39] JAYARAMAN, J.; RODRIGUES, R. de L. The wigner-heisenberg algebra as an effective operator technique for simpler spectral resolution of general oscillator-related potentials and the connection with the susyqm algebra. *J. Phys. A:Math Gen*, v. 23, p. 3123–3140, 1990.
- [40] M., P. S. Supersymmetries in pure parabosonic systems. *Int. J. Modern Physics*, v. 15, p. 3679, 2000.
- [41] SAKURAI, J. J. *Modern Quantum Mechanics*. [S.l.]: Addison Wesley Longman, 1994.
- [42] BAGCHI, B. K. *Supersymmetry in Quantum and Classical Mechanics*. [S.l.]: CHAPMAN & HALL/CRC, 2001.
- [43] RAVNDAL, F. Elementary supersymmetry. *Proc CERN School of Physics*, v. 85, p. 302, 1984.
- [44] VAINSHTEIN, A.; SMILGA, A.; SHIFMAN, M. *Sov. Phys. JETP*, v. 67, p. 25, 1988.
- [45] SUDARSHAN, E. C. G. Equivalence of semiclassical and quantum mechanical descriptions of statistical light beams. *Physics Review Letters*, v. 10, p. 277–279, 1963.

- [46] KLAUDER, J. R.; SKAGERSTAM, B. S. *Coherent States, Applications in Physics and Mathematical Physics*. [S.l.]: World Scientific, 1985.
- [47] ZHANG, W.-M. Coherent states: Theory and some applications. *Reviews of Modern Physics*, v. 62, p. 867–927, 1990.
- [48] GRIFFITHS, D. *MECANICA QUANTICA*. [S.l.]: Pearson Education, 2011.
- [49] NIETO, M. M.; JR, L. M. S. Coherent states for general potentials. ii. confining one-dimensional examples. *Physics Review*, v. 20, p. 1332, 1979.
- [50] WEYL, H. *Gruppentheorie und Quantenmechanik*. [S.l.]: UNVERÄND. REPROGRAF. NACHDR, 1928.
- [51] GERRY, C. C.; KNIGHT, P. L. *Introductory Quantum Optics*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2004.
- [52] YANG, L. M. A note on the quantum rule of the harmonic oscillator. *Physics Review*, v. 84, p. 788–790, 1950.
- [53] N, M. et al. Representations and properties of para-bose oscillator operators. i. energy position and momentum eigenstates. *Mathematical Physics*, v. 21, p. 2386–2394, 1980.
- [54] BOULWARE, D. G.; DESER, S. Ambiguity of harmonic-oscillator commutation relations. *II Nuovo Cimento*, v. 30, p. 230–234, 1963.
- [55] OHNUKI, Y.; KAMEFUCHI, S. On the wave-mechanical representation of a bose-like oscillator. *Journal of Mathematical Physics*, v. 19, p. 67–78, 1978.
- [56] ARFKEN, G. B.; WEBER, H. J. *Mathematical Methods for Physicists*. [S.l.]: Campus, 2005.
- [57] MACHADO, K. D. *Teoria do Eletromagnetismo*. [S.l.]: Editora UEPG, 2007. 909 p.
- [58] HAAR, V. A. Der massbegriff in der theorie der kontinuierlichen gruppen.*. *Annals of Mathematics*, v. 34, p. 147–169, 1933.
- [59] JAYARAMAN, R. d. L. J.; VAIDYA, A. N. A susy formulation à la witten for de susy isotonic oscillator canonical supercoherent states. *J. Phys. A:Math Gen*, v. 32, p. 6643–6652, 1999.
- [60] ROWE, D. J.; BAHRI, C. Rotation-vibration spectra of diatomic molecules and nuclei with davidson interactions. *J. Phys. A: Math. Gen.*, v. 31, p. 4947, 1998.
- [61] RODRIGUES, R. de L. On the hydrogen atom via the wigner-heisenberg algebra. *J. Phys. A: Math. Theo.*, v. 42, p. 1–8, 2009.