



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE  
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA  
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

**RELAÇÃO DE INCERTEZA  
DE IÑIGO e GÉZA  
APLICADA AOS ESTADOS BINOMIAIS  
José Gonzales Firmino**

CAMPINA GRANDE

- 2013 -

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE  
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA  
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

**RELAÇÃO DE INCERTEZA  
DE IÑIGO e GÉZA  
APLICADA AOS ESTADOS BINOMIAIS**

**José Gonzales Firmino**

Dissertação realizada sob a orientação do Prof. Dr. Aécio Ferreira de Lima, apresentada à Unidade Acadêmica de Física em complementação aos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

CAMPINA GRANDE

- 2013 -

*Dedico este trabalho a  
Maria do Carmo Firmino,  
minha mãe in memória,  
as minhas filhas  
Lorrane, Tarsila e Emanuele  
e a minha esposa Raquel,  
que sempre me apoiaram  
compreendendo as minhas ausências,  
confortando-me nos momentos difíceis,  
proporcionando-me momentos  
de superação e aprendizado.*

# AGRADECIMENTOS

Ao meu Deus por ser o que sou, pela oportunidade de estudar e buscar mais um grau em minha vida, embora com muitos esforços, mas cheia de alegrias e boas relações com todos aqueles que me rodeiam;

Ao meu orientador, professor Dr. Aécio Ferreira de Lima pela colaboração que recebi durante a fase de preparação desta dissertação, pelo apoio e compreensão durante a finalização deste trabalho, pelo incentivo nessa caminhada acadêmica nunca deixando desanimar com os tropeços e sempre unindo forças para vencer os desafios; sua atenção, e cobrança era intensa, mesmo assim, me deu liberdade apreciável em delinear a elaboração e completar esta dissertação, fornecendo-me todos os subsídios iniciais, literatura e discussão e subsequente apoio necessário para desenvolver minha pesquisa. Durante a execução deste trabalho, sempre apontou para vários artigos valiosos bem como em vários pontos importantes durante sua criação.

O apoio da minha família, minhas filhas Lorrane, Tarsila e Emanuele e em especial a minha mãe, in memória; a minha esposa Raquel pelo apoio emocional durante a etapa final deste trabalho;

Ao professor Rafael de Lima Rodrigues, colaborador e incentivador;

A todos os professores e funcionários da Unidade Acadêmica de Física da UFCG, em especial ao secretário do Mestrado Hélio que contribuíram com a minha formação profissional;

Aos amigos: Paulo Ribeiro, Paulo Sérgio, Crelison, Albery, Neymar Nepomuceno, Pablo Sampaio, Júlio Mota e em especial as amigas Karina e Graciana, em que depusitei a confiança do companheirismo e luta em busca do crescimento profissional

e acadêmico, e desde o início desta caminhada estiveram ao meu lado, por todas as discussões e aconselhamentos, por todos os momentos que passamos juntos e pela oportunidade de desfrutar de vossa amizade que contribuiu muito para realização desse trabalho, e que de forma direta ou indireta, ajudaram-me a alcançar este objetivo.

A todos que direta ou indiretamente possibilitaram a conclusão deste trabalho;

*Mathematics is the tool specially suited  
for dealing with abstract concepts  
of any kind and there is no limit to  
its power in this field. For this  
reason a book on the new physics,  
if not purely descriptive of experimental  
work, must be essentially mathematical.  
(Paul Adrien Maurice Dirac)*

## RESUMO

Uma breve introdução às idéias fundamentais a teoria quântica é apresentada. As principais tentativas de definir um operador de fase como operador hermitiano é mencionada como também as dificuldades relacionadas a incerteza número-fase. Uma alternativa é a busca de operadores não-hermitianos como sugerido por Levy-Leblond. Revisamos a obtenção da relação de incerteza de Iñigo e Géza, uma desigualdade que utiliza a incerteza número-operador de aniquilação do campo de radiação quantizado, como alternativa à relação número-fase.

Usando os estados binomiais obtivemos os chamados estados inteligentes com uso da relação de Iñigo e Géza. Por fim comentamos o limite inferior responsável pela saturação da desigualdade.

Palavra-chave: Operador de fase, relação de incerteza, estados binomiais.

## ABSTRACT

A brief introduction to the fundamental ideas of quantum theory is presented. The main attempts to obtain a phase Hermitian operator is mentioned as well as the difficulties related to the number-phase uncertainty. An alternative is to search of non-Hermitian operators as suggested by Levy-Leblond. Revised obtaining the Iñigo and Géza relation, an inequality using the uncertainty number-annihilation operator of quantized radiation field, as an alternative to the number-phase relation.

We have obtained for the binomial states the so called “intelligent states” by the Iñigo and Géza relation. Also we have comment to the limit responsible for the lower saturation of inequality..

**Keywords:** Phase operator, uncertainty relation, binomial state.



# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Conceitos Fundamentais da Física Quântica</b>	<b>4</b>
2.1	Grandezas . . . . .	5
2.2	Observável e Valor Medido . . . . .	5
2.3	Estado . . . . .	6
2.3.1	Postulados e Formalismo da Física Quântica . . . . .	7
2.3.2	Operadores . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Relação de Incerteza e observável Fase</b>	<b>16</b>
3.1	Relação de Incerteza . . . . .	16
3.2	Fase . . . . .	18
3.3	Observável de Fase . . . . .	19
<b>4</b>	<b>Quantização da Fase</b>	<b>22</b>
4.1	Quantização da Fase . . . . .	22
4.2	Formalismo de Dirac . . . . .	23
4.3	Formalismo de Susskind-Glogower . . . . .	25
4.4	Formalismo de Pegg-Barnett . . . . .	27
<b>5</b>	<b>Relação de incerteza de Iñigo e Géza e a aplicação aos Estados Bino-</b>	<b>29</b>
	<b>miais</b>	
5.1	Quantização do movimento . . . . .	30
5.2	Estados binomiais . . . . .	36
<b>6</b>	<b>Conclusão</b>	<b>42</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>43</b>

# Capítulo 1

## Introdução

Neste trabalho apresentamos a relação de Incerteza de Iñigo e Géza [35], que usa os operadores de número ( $\hat{n}$ ) e de aniquilação ( $\hat{a}$ ) como uma alternativa bem comportada para a relação de incerteza do operador de número e operador de fase ( $\Delta\hat{n}.\Delta\hat{\Phi}$ ), aplicada aos Estados Binomiais.

A motivação para a escolha desse tema foi, por um lado a dificuldade encontrada para se trabalhar com as relações de incerteza em que envolvem a fase, principalmente nos experimentos de interferometria do campo quantizado. Por outro lado pensamos em investigar a relação número-operador de aniquilação na interpolação entre estados conhecidos. Nesta direção procuramos investigar a relação de incerteza número-fase proposta por Iñigo e Geza para estados (interpoladores do campo quantizado. Seguindo o trabalho de Lima, Baseia e Marques[1], que investigam a relação ( $\Delta\hat{n}.\Delta\hat{\Phi}$ ), para Estados Interpoladores de Número e Fase definidos, como estados binomiais “BS” e estado intermediário do estado de fase “INPS”. O estudo de estados interpoladores permite investigar teoricamente propriedades físicas que possuem características intermediárias entre estados conhecidos.

Entender a física quântica, e principalmente o conceito de fase, não é algo trivial, é sabido que os fenômenos observados ao nosso redor, são governados pelas leis de Newton. Neste ponto já podemos destacar uma das características fundamentais da física newtoniana (física clássica): a evolução do estado de um sistema é completamente de-

terminista, ou seja, os estados dinâmicos futuros são precisamente determinados pelos estados dinâmicos do presente.

A física quântica procura descrever o comportamento de objetos microscópicos, alterou não só nossa compreensão sobre os fundamentos da física, mas também nossas noções básicas sobre o universo microscópico [2].

A física quântica iniciou-se com o problema da catástrofe do ultravioleta e com a introdução de Planck da hipótese da radiação do corpo negro, explicando o espectro da radiação do corpo-negro. Suas conclusões levaram Einstein a entender o efeito fotoelétrico e introduzir o conceito de fóton. Estas concepções levaram Dirac a combinar a natureza corpuscular-ondulatória da luz, com o conceito de campo de radiação, e explicar todos os fenômenos decorrentes dessa característica dual, assim como a absorção de um fóton do campo devido à excitação de um átomo [4].

No **Capítulo 2**, revisaremos conceitos fundamentais para uma melhor compreensão da teoria quântica. Procurando focar nas principais definições necessárias para o estudo proposto. Iniciaremos com uma abordagem: de Grandezas, observável, valor medido, estado, operadores e por fim as probabilidades na física quântica.

No **Capítulo 3**, apresentaremos a Relação de Incerteza de Heisenberg, da fase do ponto de vista clássico e quântico e as abordagens para quantização da fase em um sistema quântico.

No **Capítulo 4**, revisaremos as principais tentativas de quantização da fase, nos formalismos de Dirac, Susskind-Glogower e Pegg-Barnett, e sua representação mais geral, obtida destes formalismos.

No **Capítulo 5**, apresentaremos a relação de incerteza de Iñigo e Géza, e sua aplicação aos estados binomiais.

No **Capítulo 6**, serão apresentadas as conclusões deste trabalho.



## Capítulo 2

# Conceitos Fundamentais da Física Quântica

**(Grandezas; Medidas e Observável; Estado; Postulados e Probabilidade)**

Na física clássica, pelas Leis de Newton, conhecendo-se um instante inicial as posições e velocidades de todas as partículas de um sistema, pode-se determinar o seu comportamento em qualquer instante posterior. Já na física quântica o comportamento da natureza é intrinsecamente indeterminado, a incerteza do resultado de uma medição significa, na perspectiva clássica, dúvida com relação à validade do resultado. A medição, desse modo, só pode ser obtida e interpretada em termos probabilísticos, mesmo para sistemas simples, como uma partícula livre, não sendo possível determinar, em geral, o resultado futuro que será obtido na medida de um observável<sup>1</sup>.

“Neste capítulo serão apresentadas definições de alguns conceitos fundamentais da teoria quântica necessários para o estudo proposto, para tanto pesquisamos autores de livros [6, 8, 9], e textos de trabalhos científicos que em parte serão reproduzidos, traduzindo ou parafraseando, procurando esclarecer o formalismo da mecânica quântica” [3, 10].

---

<sup>1</sup>São grandezas físicas que podem ser medidas na física quântica, por exemplo: posição, velocidade, momento, energia etc.

## 2.1 Grandezas

Define-se como sendo uma grandeza física aquilo que através de especificação é medido ou declarado. Algumas grandezas de certos objetos têm espectros contínuos, e outros têm espectros discretos, isto é, valores possíveis, aos quais podem ser colocados em correspondência biunívoca com números naturais ou inteiros.

A existência de grandezas com espectros discretos, ou quantizadas representa uma das características peculiares da física quântica, já que na física clássica em geral as únicas grandezas quantizadas são relativas a fenômenos ondulatórios: por exemplo, as frequências de ondas em uma corda esticada entre dois pontos fixos.

As grandezas físicas estão associadas as propriedades mensuráveis desses objetos, que fazem parte da composição de um sistema, são representadas por funções que têm esses números como argumentos, por exemplo:  $A = f(\hat{x}, \hat{p})$ , no caso operador posição  $\hat{x}$  e operador momento  $\hat{p}$ , e poderia ser a energia cinética, energia potencial etc.

## 2.2 Observável e Valor Medido

Uma grandeza observável, como o próprio nome já diz, é algo que pode ser mensurada e necessita ter como valor um número real. A medida de um observável nem sempre é a verdadeira medida, mas é certo de que cada valor é sempre a medida de um valor que quantifica o desvio entre o valor medido e o valor real. Quando faz-se uma medida de uma grandeza qualquer, existe a possibilidade de se cometer um erro, e estabelecendo-se uma margem de erro, pode-se afirmar que a medida real esta compreendida entre o intervalo da margem de erro para cima ou baixo, logo o conceito de valor medido é diferente do valor real para uma grandeza qualquer.

Quando se mede experimentalmente uma grandeza, neste momento, efetua-se uma

medida entre todos os possíveis valores observáveis, mas o sistema estará naquele instante em apenas um deles, e verifica-se apenas um valor na medida do observável. No entanto, como o sistema de medição não é perfeito, o valor medido não é exatamente o valor real observável, conhecem-se apenas as probabilidades de, numa dada experiência, ocorrer cada um dos possíveis valores do observável.

Não existe erro no valor observável, contudo, esse valor nunca é conhecido experimentalmente <sup>2</sup> podendo ser determinado apenas teoricamente. A teoria é validada pela experimentação e quando o valor determinado teoricamente está em um determinado intervalo do valor medido, tem-se o possível valor do observável e quanto menor é esse intervalo mais precisa será a medida.

## 2.3 Estado

Estados são caracterizações básicas dos objetos físicos que variam de acordo com a teoria e determina completamente os valores das propriedades físicas do sistema associado a ele num dado instante de tempo (ou as probabilidades de cada um de seus valores possíveis serem medidos quando se trata de uma teoria probabilística). Em outras palavras, todas as informações possíveis de se conhecer em um dado sistema constituem seu estado. A ideia básica da física quântica é que o estado físico de um sistema são caracterizações básicas dos objetos físicos, que podem conter a máxima informação que se permite atribuir ao sistema.

Cada sistema ocupa um estado num instante no tempo e as leis da física devem ser capazes de descrever como o sistema evolui.

A primeira grande fonte de dificuldades teóricas e filosóficas da física quântica é a da aparente incompletude da teoria, pois ela deixa de especificar certos resultados de

---

<sup>2</sup>Admite-se que existe um Valor Verdadeiro bem definido para toda grandeza física experimental, isto é, um valor que seria obtido por uma medição perfeita. Entretanto o Valor Verdadeiro de uma grandeza é por natureza indeterminado, uma vez que não existem instrumentos que permitem medir sem que haja algum tipo de erro. Portanto, o valor medido de uma grandeza é sempre uma aproximação para o Valor Verdadeiro, ou o Melhor Valor da Grandeza, ou o Valor Esperado.

medidas e se faz necessário introduzir esse segundo processo de evolução de estado. Na vertente ortodoxa, isso foi feito na forma de um “postulado”, sem qualquer explicação teórica, e motivado unicamente pela necessidade de dar-se conta do aparecimento de resultados de medidas precisas quando das mensurações. Em 1935, Schrödinger argumentou a favor da tese da incompletude da física quântica explicitando um problema grave que surge quando se investiga mais detalhadamente essa forma da teoria ao tratar o processo de medida, especialmente quando aplicados a sistemas quânticos individuais, como por exemplo no caso do “gato de Schrödinger”.

### 2.3.1 Postulados e Formalismo da Física Quântica

Na física quântica procura-se responder a alguns questionamentos:

- i - Como o estado de um sistema quântico é descrito matematicamente em um dado instante de tempo?
- ii - Conhecido o estado do sistema, como se pode prever os resultados da medida das diferentes observáveis físicas?

As respostas às perguntas acima serão fornecidas pelos postulados<sup>3</sup> da mecânica quântica.

#### 1º Postulado - Estados Físicos e Vetores

Na física quântica, os estados são representados por vetores em espaços vetoriais abstratos conhecidos por espaços de Hilbert. Em um instante de tempo  $t_0$ , o estado de um sistema físico é definido especificando-se por um  $Ket |v\rangle$ <sup>4</sup>, pertencente a um espaço vetorial  $\mathcal{E}$ , este contém a informação completa sobre o estado do sistema. Tudo o que se pode saber sobre o sistema físico está contido no vetor estado  $|v\rangle$  em um espaço vetorial  $\mathcal{E}$  complexo. Este objeto matemático abstrato  $Ket$  permite o cálculo da probabilidade de se obter resultados específicos em um experimento concreto. Por exemplo, permite que se calcule a probabilidade de encontrar um elétron em uma

---

<sup>3</sup>Princípio ou fato reconhecido, é uma sentença que não é provada ou demonstrada, e é considerada como óbvia ou como um consenso inicial necessário para a construção ou aceitação de uma teoria.

<sup>4</sup>designação atribuída pela notação construída por Paul Dirac



região particular em torno do núcleo. Neste trabalho será usada a notação de *bras* e *kets*, desenvolvidas por Dirac.

## Estado Quântico no Espaço de Hilbert

Um espaço de Hilbert, é um espaço vetorial dotado de produto interno, ou seja, com noções de distância e ângulos, de dimensão finita ou infinita definida sobre os complexos. Esse espaço obedece a uma relação de completude e permite que, de certa forma, noções intuitivas sejam aplicadas em espaços funcionais [11]. Esta estrutura matemática dos espaços vetoriais lineares fornecem a linguagem matemática natural para o desenvolvimento do formalismo da física quântica. A posição ou o momento de uma partícula que pode assumir qualquer valor representa um caso de dimensionalidade infinita. Trata-se de um espaço, no qual o estado físico de um sistema quântico é completamente descrito, em que vetores de estado armazenam toda a informação disponível sobre o sistema, e é definido:

Espaço Dual ao espaço representado pelos *kets*, que chamaremos de espaço *bra*, associando a cada vetor  $|v\rangle$  do espaço *ket*, um correspondente vetor *bra*, simbolizado por  $\langle v|$ , no espaço Dual (ou espaço *bra*), temos assim uma correspondência Dual entre os dois espaços, ou seja:

$$(|v\rangle)^* \rightleftharpoons \langle v| \quad (2.3.1)$$

\* = complexo conjugado

Tendo conhecimento destes princípios, podemos introduzir o conceito de produto interno (produto escalar) entre os vetores  $|v\rangle$  e  $|u\rangle$  como:

$$\langle v| u \rangle = \langle u| v \rangle^* = c_u \quad (2.3.2)$$

isto é, como sendo a ação do *bra*  $\langle v|$  associado ao *ket*  $|v\rangle$  sobre o *ket*  $|u\rangle$  e o resultado é sempre um número complexo que depende de  $|u\rangle$ .

## Propriedades do produto interno

$$\langle v | (|n\rangle + |u\rangle) = \langle v | n\rangle + \langle v | u\rangle \quad (2.3.3)$$

$$\langle v | cu\rangle = c \langle v | u\rangle \quad (2.3.4)$$

$$\langle vc | u\rangle = c^* \langle v | u\rangle \quad (2.3.5)$$

sendo “c” um escalar complexo. Dois vetores não nulos são ortogonais apenas se

$$\langle v | u\rangle = 0 \quad (2.3.6)$$

Outro ponto importante a se destacar, é que tanto o vetor  $|v\rangle$  quanto o vetor  $c|v\rangle$  (onde  $c$  é um número complexo não nulo) representam o mesmo estado físico (a mesma de uma constante multiplicativa). Desta forma, exige-se que todos os vetores obedeam a condição de normalização, ou seja, estados são normalizados à unidade:

$$\langle v | v\rangle = \langle u | u\rangle = 1 \quad (2.3.7)$$

A condição de normalização é de extrema importância, pois está associada à interpretação probabilística da física quântica.

### 2.3.2 Operadores

Um operador é um ente que transforma um vetor do espaço em outro, isto é, estabelece uma relação funcional entre dois espaços vetoriais.

#### 2º Postulado - Observáveis e operadores

Toda quantidade física mensurável  $A$  é descrita por um operador atuando em  $\mathcal{E}$  (espaço dos estados); este operador é um observável, grandeza que pode ser mensurada e necessita ter como valor um número real.

A relação funcional que um operador estabelece pode ser chamada de transformação

linear, e estes operadores são representados pelos símbolos ( $\hat{A}$  ou  $\mathbf{A}$ ):

$$\hat{A}|v\rangle = |v\rangle' \quad (2.3.8)$$

### 3º Postulado - Medições e autovalores

O único resultado possível em uma medida de uma quantidade física  $A$  é um dos autovalores do observável correspondente  $A$ , ou seja, os resultados possíveis para a medição do observável  $A$  no estado físico  $|v_i\rangle$  são os autovalores  $v_i$  de  $\hat{A}$ . Neste caso, o estado do sistema após a medição é descrito pelo autovetor  $|v_i\rangle$  associado ao autovalor  $v_i$ ,

$$\hat{A}|v_i\rangle = v_i|v_i\rangle \quad (2.3.9)$$

Assim, o operador  $\hat{A}$  corresponde, no formalismo, à grandeza física  $A$ . O significado físico de uma grandeza física requer, naturalmente, que se possa atribuir valores a ela, o que permitirá colocar a correspondência da realidade empírica, com a leitura de um aparelho de medida. Com base nestas informações, apresentamos alguns:

$\hat{x} \rightarrow$  a posição .

$\hat{p} \rightarrow$  o momento cinético.

$\hat{H} \rightarrow$  a energia (hamiltoniano).

$\hat{V} \rightarrow$  a energia potencial.

$\hat{L}_x, \hat{L}_y$  e  $\hat{L}_z \rightarrow$  o momento angular na direção  $x, y$  e  $z$ .

$\hat{S}_x, \hat{S}_y$  e  $\hat{S}_z \rightarrow$  o momento angular intrínscio (*spin* na direção  $x, y$  e  $z$ ).

$\mathbf{n} \rightarrow$  o número de partículas (de certo tipo).

O conceito de operador está estritamente ligado à medida dos observáveis. Admitindo que todos os operadores com interesse físico são lineares, preserva-se o caráter linear das operações sobre os vetores do espaço de Hilbert, ou seja;

$$\hat{A}(c_1|v_1\rangle + c_2|v_2\rangle) = c_1\hat{A}|v_1\rangle + c_2\hat{A}|v_2\rangle. \quad (2.3.10)$$

Deste modo, o operador fica completamente definido se a sua ação sobre qualquer vetor da base é definida, isto é, um operador  $\hat{A}$  é equivalente à matriz  $A_{ij} = \langle v_i|\hat{A}|v_j\rangle$

que o representa na base  $\{|v_j\rangle\}$ , e matematicamente se  $\sum_j^\infty |v_j\rangle \langle v_j| = 1$ , tem-se:

$$\hat{A} = \sum_i^\infty \sum_j^\infty |v_i\rangle \langle v_i| \hat{A} |v_j\rangle \langle v_j| = \sum_{ij}^\infty A_{ij} |v_i\rangle \langle v_j|. \quad (2.3.11)$$

Os coeficientes da expansão  $A_{ij}$  são dispostos numa matriz quadrada, representando o operador  $\hat{A}$  na base  $\{|v_j\rangle\}$  ou seja:

$$\hat{A} \cong \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \cdots \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \cdots \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}. \quad (2.3.12)$$

Observações:

1 - Quando se tem um operador, tal que  $(\hat{A}^T)^*$ , denomina-se este operador de adjunto e define-se  $(\hat{A}^T)^*$  como sendo  $\hat{A}^\dagger$ . O símbolo  $\dagger$ , representa operacionalmente as transposição matricial e a conjugação complexa “\*”.

2 - Operadores atuando nos *kets*, a correspondência Dual é dada por:

$$\hat{A} |v\rangle \rightleftharpoons \langle v| \hat{A}^\dagger \quad (2.3.13)$$

Deve-se notar que enquanto um operador atua sobre um *ket* pela esquerda, sua ação sobre o *bra* é realizada pela direita.

3 - Por definição um operador  $\hat{A}$ , é unitário quando,

$$\hat{A}\hat{A}^\dagger = \hat{A}^\dagger\hat{A} = 1. \quad (2.3.14)$$

4 - Quando existem operadores unitários de modo que

$$\hat{A} = \hat{A}^\dagger. \quad (2.3.15)$$

são chamados de hermitianos e pode-se escrever:

$$\hat{A} |v\rangle \rightleftharpoons \langle v| \hat{A} \quad (2.3.16)$$

Em outras palavras, do 3º Postulado tem-se que a cada observável do mundo físico pode-se associar um operador linear hermitiano, cujos possíveis resultados das medidas são os autovalores destes operadores. Os autovalores dos operadores hermitianos

são reais, assim, passíveis de serem resultados de medidas físicas [9].

5 - Sempre é possível definir um conjunto completo de estados ortonormais formando uma base do espaço de Hilbert. Partindo-se do princípio da superposição<sup>5</sup>, o vetor de estado  $|v\rangle$  pode ser escrito como combinação linear dos vetores da base do espaço de Hilbert. Dessa forma, é possível expandir qualquer vetor em termos dos  $n$  autovetores  $\{|v_1\rangle, |v_2\rangle, \dots, |v_n\rangle\}$  de um operador hermitiano  $\hat{A}$ .

$$|v\rangle = \sum_i^{\infty} c_i |v_i\rangle. \quad (2.3.17)$$

Neste caso, diz-se que  $|v\rangle$  é uma superposição dos autovetores  $\{|v_1\rangle, |v_2\rangle, \dots, |v_n\rangle\}$ . Para determinar os coeficientes  $c_i$  da expansão, basta notar que os autovetores de  $\hat{A}$  são ortonormais.

6 - Define-se uma representação para o operador identidade  $\hat{I}$  em termos dos autovetores de qualquer operador hermitiano  $\hat{A}$ , chamada relação de Completeza:

$$\sum_i^{\infty} |v_i\rangle \langle v_i| = \hat{I}. \quad (2.3.18)$$

7 - O operador Identidade  $\hat{I}$  é definido de forma a satisfazer  $\hat{I}|v\rangle = |v\rangle$  para todo  $|v\rangle$  que pertence ao espaço vetorial. O operador inverso de  $\hat{A}$ , denotado por  $\hat{A}^{-1}$  é o operador satisfazendo:

$$\hat{A}(\hat{A}^{-1}) = (\hat{A}^{-1})\hat{A} = \hat{I}. \quad (2.3.19)$$

8 - Supondo que a base é numerável, atentando que essa simplificação não prejudica a generalização da teoria. Neste caso, pode-se escrever as condições de ortogonalidade, se as bases não forem ortonormais, elas poderão ser ortonormalizadas pelo procedimento de ortogonalização de Gram-Schmidt[7], isto é:

$$\langle v_i | v_j \rangle = \delta_{ij} \quad (2.3.20)$$

onde  $\delta_{ij}$  é a delta de Kronecker. Então,

$$c_i = \langle v_i | v \rangle \quad (2.3.21)$$

---

<sup>5</sup>Adição de amplitudes de vetores de estado por interferência

isto é, o coeficiente  $c_i$  é apenas projeção do vetor de estado  $|v\rangle$  de estado sobre o vetor da  $|v_i\rangle$  base. Esta relação permite escrever-se:

$$|v\rangle = \sum_i^{\infty} |v_i\rangle \langle v_i| v \rangle \quad (2.3.22)$$

9 - Alguns operadores não Hermitianos foram introduzidos, os quais não estão relacionados a observáveis, como por exemplo, os operadores a seguir:

$\hat{a}^\dagger$  ou  $\mathbf{a}^\dagger \rightarrow$  criação de partículas.

$\hat{a}$  ou  $\mathbf{a} \rightarrow$  aniquilação de partículas.

10 - É importante observar que a ordem no produto de operadores, que sempre serão matrizes quadradas, nem sempre é comutativa; em outras palavras, o produto de operadores depende da ordem de composição, ou seja, em geral  $\hat{A}\hat{B} \neq \hat{B}\hat{A}$ . Pode-se então, definir o comutador dos operadores  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$  como sendo:

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} \quad (2.3.23)$$

#### 4º Postulado - Probabilidades quânticas

O valor médio das medições do observável  $A$  em um sistema físico descrito pelo vetor de estado é:

$$\langle \hat{A} \rangle = \langle v | \hat{A} | v \rangle. \quad (2.3.24)$$

Expandindo o vetor de estado  $|v\rangle$  como uma superposição dos autovetores ortonormais ( $\langle a_i | a_j \rangle = \delta_{ij}$ ) do operador  $\hat{A}$  que representa o observável  $A$ , temos:

$$|v\rangle = \sum_i^{\infty} c_i |a_i\rangle, \quad (2.3.25)$$

e a dual correspondência é:

$$\langle v | = \sum_i^{\infty} c_i^* \langle a_i | \quad (2.3.26)$$

Logo;

$$\langle \hat{A} \rangle = \langle v | \hat{A} | v \rangle = \sum_i^{\infty} |c_i|^2 a_i \quad (2.3.27)$$

Por outro lado, conforme equação (2.3.9), associado a cada estado físico representado por um particular vetor de estado  $|v\rangle$ , a probabilidade de na medida de  $\hat{A}$  em  $|v\rangle$  obter uma de suas várias possibilidades de autovalores  $v_j$ , é dada por:

$$p_j = |\langle v_j | v \rangle|^2 = \langle v | \hat{P}_j | v \rangle, \quad (2.3.28)$$

onde  $\hat{P}_j = |v_j\rangle \langle v_j|$  é o operador, que após a medida, projeta o estado do sistema físico para o estado  $|v_j\rangle$  [9].

Embora para cada estado quântico o formalismo sempre deixa de especificar os valores de certas grandezas, atribui-se, no entanto, probabilidades de que os valores sejam encontrados empiricamente, por meio de medidas.

A especificação de um sistema físico não determina unicamente os valores que experimentos fornecem para as suas propriedades (ou as probabilidades de se medirem tais valores, em se tratando de teorias probabilísticas). Além disso, os sistemas físicos não são estáticos, eles evoluem com o tempo, de modo que o mesmo sistema, preparado da mesma forma, pode dar origem a resultados experimentais diferentes dependendo do tempo em que se realiza a medida.

Muitas das variáveis que ficam bem determinadas na física clássica são substituídas por distribuições de probabilidades na física quântica, que é uma teoria intrinsecamente probabilística (isto é, dispõe-se apenas de probabilidades não por uma simplificação ou ignorância, mas porque isso é tudo que a teoria é capaz de fornecer).

Sabendo que a equação de autovalores (2.3.13), definida como sendo:

$$\hat{A} |a\rangle = a |a\rangle, \quad (2.3.29)$$

$$\langle a | \hat{A}^\dagger = \langle a | a^* \quad (2.3.30)$$

Designando por  $\{|a_1\rangle, |a_2\rangle, |a_3\rangle, \dots\}$  o conjunto dos autovetores de um observável  $\hat{A}$ , podemos, então, escrever o seu valor médio em um estado  $|v\rangle$  qualquer do espaço

vetorial como:

$$\begin{aligned}
 \langle v | \hat{A} | v \rangle &= \langle v | \sum_j^{\infty} | a_j \rangle \langle a_j | \hat{A} | v \rangle \\
 &= \sum_j^{\infty} a_j \langle v | a_j \rangle \langle a_j | v \rangle \\
 &= \sum_j^{\infty} a_j |\langle v | a_j \rangle|^2 \\
 &= \sum_j^{\infty} a_j p_j(a_j, v).
 \end{aligned} \tag{2.3.31}$$

onde  $p_j(a_j, v) = |\langle v | a_j \rangle|^2$  é a probabilidade de uma medida da grandeza  $\hat{A}$  no estado  $|v\rangle$  fornecer o resultado  $a_j$ . A normalização de  $|v\rangle$  implica em:

$$\sum_{j=1}^{\infty} p_j = 1 \tag{2.3.32}$$



## Capítulo 3

# Relação de Incerteza e observável

## Fase

### 3.1 Relação de Incerteza

A incerteza do resultado de uma medição significa dúvida com relação à validade do resultado só pode ser obtida e interpretada em termos probabilísticos. É uma indicação de quanto o melhor valor pode se afastar do valor real da grandeza. Pode ser considerada como valor possível que o erro pode assumir definindo um intervalo ou faixa na qual se estima estar localizado o valor da grandeza medida, dentro de um determinado nível de confiança.

A física quântica tem como um pilar um princípio denominado Princípio da incerteza de Heisenberg, que consiste num enunciado da física quântica formulado inicialmente em 1927 por Werner Heisenberg, impondo restrições à precisão com que se podem efetuar medidas simultâneas de uma classe de pares de observáveis.

Consideremos dois operadores hermitianos quaisquer  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$  e a relação de comutação entre eles expressa por

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} = i\hat{C} \quad (3.1.1)$$

em que, de modo geral,  $\hat{C}$  é um operador hermitiano. No caso de  $\hat{C}$  ser nulo, os operadores  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$  são comutativos, ou simplesmente, comutam.

Para os operadores  $\hat{x}$  e  $\hat{p}_x$ , definidos no espaço de autofunções da posição  $[\Psi(x)]$ , por exemplo, para os quais a relação (3.1.1) toma a forma:

$$[\hat{x}, \hat{p}_x] = i\hbar \quad (3.1.2)$$

em que  $\hat{C} = \hat{I}\hbar$ , (sendo  $\hat{I}$  o operador identidade).

O produto da incerteza associada ao valor de uma coordenada  $x_i$  e a incerteza associada ao seu correspondente momento linear  $p_i$  não pode ser inferior, em grandeza, à constante de Planck quando igual a 1, logo é impossível conhecer simultaneamente e com exatidão a posição e o momento de uma partícula.

Da Equação (2.3.24), podemos expressar os valores médios dos operadores  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$ , por<sup>1</sup>:

$$\langle \hat{A} \rangle = \langle v | \hat{A} | v \rangle \quad e \quad \langle \hat{B} \rangle = \langle v | \hat{B} | v \rangle \quad (3.1.3)$$

sendo:

$$\langle \hat{A} \rangle = \int \Psi^*(\vec{r}) \hat{A} \psi(\vec{r}) d^3r. \quad (3.1.4)$$

Os desvios desses valores médios ou valores esperados são dados por:

$$\Delta \hat{A} = \hat{A} - \langle \hat{A} \rangle \quad e \quad \Delta \hat{B} = \hat{B} - \langle \hat{B} \rangle. \quad (3.1.5)$$

Como os valores esperados dados pela Equação 3.1.2 são apenas números,  $\Delta \hat{A}$  e  $\Delta \hat{B}$  obedecem à mesma relação de comutação 3.1.1, ou seja:

$$[\Delta \hat{A}, \Delta \hat{B}] = [\hat{A}, \hat{B}] = i\hat{C} \quad (3.1.6)$$

Considerando-se a seguinte integral:

$$I(\alpha) = \int \left| (\alpha \Delta \hat{A} - i \Delta \hat{B}) \psi \right|^2 d^3r \geq 0, \quad (3.1.7)$$

---

<sup>1</sup>Obs.:  $|v\rangle$  representa um vetor no espaço vetorial abstrato, ou seja, no caso de um espaço contínuo de funções  $|v\rangle \leftrightarrow \Psi(x; y; z; t)$

em que  $\alpha$  é um parâmetro arbitrário, porém real. Visto que  $\Delta\hat{A}$  e  $\Delta\hat{B}$  são operadores hermitianos, podemos desenvolver a Equação 3.1.7, do seguinte modo:

$$\begin{aligned}
I(\alpha) &= \left\langle (\alpha\Delta\hat{A} - i\Delta\hat{B})^\dagger \psi \mid (\alpha\Delta\hat{A} - i\Delta\hat{B}) \mid \psi \right\rangle \\
&= \langle \psi \mid \alpha^2(\Delta\hat{A})^2 + \alpha\hat{C} + (\Delta\hat{B})^2 \mid \psi \rangle \\
&= \alpha^2 \left\langle (\Delta\hat{A})^2 \right\rangle + \left\langle (\Delta\hat{B})^2 \right\rangle + \alpha \left\langle \hat{C} \right\rangle \\
I(\alpha) &= \alpha^2 \left\langle (\Delta\hat{A})^2 \right\rangle + \alpha \left\langle \hat{C} \right\rangle + \left\langle (\Delta\hat{B})^2 \right\rangle, \tag{3.1.8}
\end{aligned}$$

para  $I(\alpha) \geq 0 \Rightarrow \alpha^2 \left\langle (\Delta\hat{A})^2 \right\rangle + \alpha \left\langle \hat{C} \right\rangle + \left\langle (\Delta\hat{B})^2 \right\rangle \geq 0$ . Procura-se  $\alpha$  tal que  $I(\alpha)$  não tenham raízes reais, logo o discriminante  $\Delta = \left\langle \hat{C} \right\rangle^2 - 4 \left\langle (\Delta\hat{A})^2 \right\rangle \left\langle (\Delta\hat{B})^2 \right\rangle < 0$ , caso  $\Delta = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{-\langle \hat{C} \rangle}{2\langle (\Delta\hat{A})^2 \rangle}$ , logo:

$$\left\langle (\Delta\hat{A})^2 \right\rangle \left\langle (\Delta\hat{B})^2 \right\rangle \geq \frac{|\langle \hat{C} \rangle|^2}{4}. \tag{3.1.9}$$

Esse é o princípio de incerteza de Heisenberg na sua forma mais geral, podendo ser colocada numa forma mais simples, como:

$$\Delta\hat{A}\Delta\hat{B} \geq \frac{1}{2} \left| \langle \hat{C} \rangle \right| \tag{3.1.10}$$

No caso da variáveis canonicamente conjugadas, temos que  $\langle \hat{C} \rangle = \mathbf{I}\hbar$ . Assim, a desigualdade de Heisenberg tem a forma geral [12] dada por:

$$\Delta\hat{A}\Delta\hat{B} \geq \frac{1}{2}\hbar. \tag{3.1.11}$$

## 3.2 Fase

Existem vários conceitos de “fase”, observável complexa de ser medida, e para evitar quaisquer confusões sobre a fase, especialmente no contexto da física quântica, recorreremos a literatura onde existem várias descrições consistente da variável fase[18].

Uma extensa pesquisa da Fase é justificada pelo fato de que ela pode levar a importante aplicações em tecnologia e transferência de informação na óptica quântica, e pode

abrigar implicações de longo alcance para a teoria quântica geral em sua formulação atual. Na verdade, a fase quântica levanta muitas questões básicas fundamentais sobre a física quântica; como operadores hermitianos para observáveis ou a sua definição no espaço de Hilbert para sistemas básicos como o oscilador harmônico.

Vamos analisar o problema geral de como medir a fase de forma mais eficiente. Este é um assunto muito importante, pois muitas medições de alta precisão são baseados em medições de fase. [13].

A fase é uma das observáveis que não podemos medir diretamente só é possível medi-la indiretamente, e isso quase sempre introduz uma incerteza extra além da incerteza intrínseca existente. Em geral, é possível melhorar as medições através da introdução de uma mudança de fase auxiliar. No caso das medições homódinas, esta mudança de fase seria baseada no conhecimento prévio sobre a fase. Neste estudo vamos considerar o caso em que a fase é desconhecida, e em vez disso a fase auxiliar é ajustada com base nos dados obtidos durante a medição.

Um outro aspecto do problema de medir a eficácia de fase é o estado em si. Cada estado com energia finita terá alguma incerteza intrínseca na fase. Gostaríamos de otimizar o estado para que ele tenha o mínimo possível de incerteza fase intrínseco, ou, alternativamente, para que ela dê a incerteza de fase mínima para algum regime específico da medição da fase [14].

### 3.3 Observável de Fase

Aparentemente, o problema da fase quântica parece inicialmente na sua abordagem, simples, essa simplicidade é enganosa pois já decorreram mais de oito décadas, à procura de uma teoria quântica para fase, amplamente aceita. O problema foi inicialmente apresentado por Dirac [16], e apesar de muitas propostas, não foi encontrado uma solução definitiva. Isto nos leva a uma observação interessante sobre a fase na

quântica: Constitui uma área de pesquisa que é extremamente fragmentada e diversificada [17].

Fase pode ser considerada uma característica principal entre a física quântica e clássica. Todos os fenômenos de interferência quântica são a priori dependente dela.

Os estados coerentes <sup>2</sup>, são caracterizados por amplitude e fase bem definidos, portanto, podem ser descritos de forma semelhante a ondas clássicas. Mas uma vez que qualquer estado pode ser decomposto em uma integral sobre estados coerentes, fase é um conceito significativo mesmo para estados arbitrários, incluindo (comprimidos) estados de fase aleatórios e como os estados número (nesses casos a chamada distribuição de fase representa a descrição formal própria da Teoria quântica, para representar a fase a partir dos primeiros princípios. Entretanto essa descrição não é operacional o tornou instigante outras definições para a fase quântica).

Afinal como podemos relacionar com segurança uma observável quântica com um operador que nos forneça todas as informações necessárias? Até então não existia operador relacionado à fase, começou-se então uma busca por um operador associado à fase  $\Phi$ , seja ela relacionada ao momento angular  $\hat{L}_z$ , formando o par canonicamente conjugado  $\{\hat{L}_z, \Phi\}$ , ou a fase relacionada com o número de fótons no campo de radiação luminoso  $\mathbf{n}$ , formando o par canonicamente conjugado  $\{\mathbf{n}, \Phi\}$ .

A primeira proposta foi a de Dirac em 1927, quando apresentou a relação de comutação para o par  $\hat{L}_z$  e  $\Phi$  [21].

$$[\hat{L}_z, \Phi] = \hat{L}_z \Phi - \Phi \hat{L}_z = i \quad (3.3.12)$$

---

<sup>2</sup>Os estados coerentes foram introduzidos por Glauber em 1963, que tinha como principal objetivo mostrar uma descrição consistente para a teoria quântica da coerência óptica. Glauber consolidou a ideia de que os auto-estados quânticos de um campo de radiação são exatamente os auto-estados do operador de aniquilação dos quanta do campo eletromagnético (fótons). Ele mostrou que essas autofunções podem ser obtidas a partir da ação de um operador de deslocamento sobre o vácuo do campo eletromagnético livre. Mostrou também que essas definições são equivalentes aos estados de incerteza mínima descobertos por Schrödinger [?].

Pelo **princípio da incerteza de Heisenberg**, Equações 3.1.10 ou 3.3.12, deveriam fornecer a relação:

$$\Delta\hat{L}_z\Delta\hat{\Phi} \geq \frac{1}{2} \quad (3.3.13)$$

que é incorreta.

Judge e Lewis em 1963 [19], corrigiram essa relação, ou seja, ela assume a seguinte forma:

$$\Delta\hat{L}_z \frac{\Delta\hat{\Phi}}{1 - 3\left(\frac{\Delta\hat{\Phi}}{\pi}\right)^2} \geq \frac{0.3}{2}. \quad (3.3.14)$$

e mostraram também que  $\hat{L}_z$ , era Hermitiano somente no subespaço das funções periódicas:  $\psi(\phi + 2\pi) = \psi(\phi)$ , sendo esta a principal dificuldade com o operador de fase [20, 21].

Particularmente na Óptica Quântica o par de operadores canonicamente conjugados  $\hat{L}_z$  e  $\hat{\Phi}$ , é substituído pelo par de operadores canonicamente conjugados  $\mathbf{n}, \mathbf{\Phi}$  sendo  $\mathbf{n}$  o operador de número (de fótons) e  $\mathbf{\Phi}$  o operador de fase, do campo luminoso.

# Capítulo 4

## Quantização da Fase

### 4.1 Quantização da Fase

Chamamos quantização da fase, o ato de encontrar no formalismo quântico um operador hermitiano  $\hat{\Phi}$ , que fornece como autovalor a fase  $\phi$  para o campo eletromagnético quantizado. Classicamente, não há ambiguidade na definição da fase. Uma onda  $\Psi(x, t)$ , de propagação geral sinusoidal pode ser descrita pela Equação  $f(x, t) = A_0 \sin(kx - \omega t + \phi_0)$ . Consideremos agora uma onda de luz como retratado na teoria eletromagnética clássica. Para um campo eletromagnético monocromático propagando na direção  $K$ , pode-se expressar o campo elétrico como [22]:

$$\vec{E}(\hat{r}, t) = \hat{e}_x E_0 \cos(\hat{K} \cdot \hat{r} - \omega t + \Phi)$$

ou

$$\vec{E}(\hat{r}, t) = \hat{e}_x \frac{1}{2} E_0 \left\{ \exp \left[ i(\hat{K} \cdot \hat{r} - \omega t + \Phi) \right] + \exp \left[ -i(\hat{K} \cdot \hat{r} - \omega t + \Phi) \right] \right\} \quad (4.1.1)$$

de modo que álgebra encontramos o campo quantizado dado por:

$$\hat{E}(\hat{r}, t) = \hat{e}_x \frac{1}{2} E_0 \left\{ \hat{a} \exp \left[ i(\hat{K} \cdot \hat{r} - \omega t) \right] + \hat{a}^\dagger \exp \left[ -i(\hat{K} \cdot \hat{r} - \omega t) \right] \right\} \quad (4.1.2)$$

onde  $E_0 = \left( \frac{\hbar \omega}{2\epsilon_0 V} \right)^{\frac{1}{2}}$  é a amplitude do campo,  $\Phi$  a fase e  $\hat{a}$  e  $\hat{a}^\dagger$  são os operadores de aniquilação e criação respectivamente. A fase não é uma quantidade que pode ser medida diretamente, no entanto, é apenas um número real e pode ser determinada sem

ambiguidade a partir da variação de  $\hat{E}(x, t)$  (desde que a amplitude seja constante e diferente de zero).

Na quantização do campo elétrico na representação de Heisenberg, o operador do campo elétrico é:

$$\hat{E}(\mathbf{R}, t) = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V}} (\epsilon e^{i(K \cdot R - \omega t)} \hat{a} + \epsilon^* e^{-i(K \cdot R - \omega t)} \hat{a}^\dagger), \quad (4.1.3)$$

onde  $\hbar$  é a constante de Planck dividida por  $2\pi$ , e  $\epsilon_0$  é a permissividade dielétrica para o vácuo,  $V$  é o volume de quantização e  $\epsilon$  é o vetor de polarização. A variação do campo elétrico no tempo e no espaço, assim como a polarização direção estão contidos neste operador do campo, mas a amplitude e a fase do campo estão contidos no estado.

Os operadores de aniquilação e criação têm as relações de comutação:

$$[\mathbf{a}, \mathbf{a}^\dagger] = \mathbf{1} \quad (4.1.4)$$

e

$$[\mathbf{a}, \mathbf{a}] = [\mathbf{a}^\dagger, \mathbf{a}^\dagger] = \mathbf{0}. \quad (4.1.5)$$

Em geral, na física quântica, queremos representar as quantidades físicas por operadores hermitianos. Na descrição da fase, na física quântica, considerada por Dirac [23], esta abordagem, infelizmente, produz dificuldades quando aplicadas a fase.

## 4.2 Formalismo de Dirac

Considere as Equações 4.1.2 e 4.1.3, elas podem ser conciliadas se decomposermos o operador  $\mathbf{a}$  como [23]:

$$\mathbf{a} = e^{i\Phi} \sqrt{\mathbf{n}}. \quad (4.2.6)$$

sendo, uma forma óbvia da definição de um operador para a fase

$$e^{i\Phi} = \mathbf{a} \mathbf{n}^{-\frac{1}{2}}, \quad (4.2.7)$$



onde  $\mathbf{n}$  é o operador para o número de fótons, dado por:

$$\mathbf{n} = \mathbf{a}^\dagger \mathbf{a}. \quad (4.2.8)$$

O operador de fase definido desta forma equivale ao considerado por Dirac [23]. O operador de fase definidos desta maneira não pode ser Hermitiano, e também não garante a unitariedade de  $e^{i\Phi}$ . De fato, com relação a unitariedade

$$e^{i\Phi} = \mathbf{a} \mathbf{n}^{-1/2}, \quad (4.2.9)$$

se  $\Phi$  é hermitiano, temos:

$$(e^{-i\Phi}) = (e^{-i\Phi})^\dagger = \mathbf{n}^{-1/2} \mathbf{a}^\dagger, \quad (4.2.10)$$

Assim,

$$(e^{-i\Phi})^\dagger (e^{-i\Phi}) = 1 = \mathbf{n}^{-1/2} \mathbf{a}^\dagger \mathbf{a} \mathbf{n}^{-1/2} = \mathbf{1}. \quad (4.2.11)$$

Já

$$(e^{i\Phi})(e^{i\Phi})^\dagger = \mathbf{a} \mathbf{n}^{-1/2} \mathbf{n}^{-1/2} \mathbf{a}^\dagger = \mathbf{a} \mathbf{n}^{-1} \mathbf{a}^\dagger \neq \mathbf{1} \quad (4.2.12)$$

o que conserva a não unitariedade de  $(e^{i\Phi})$ .

Esta definição do operador de fase produz outros problemas. Por exemplo, deriva de Dirac relação de comutação:

$$[\mathbf{n}, \Phi] = \mathbf{i}. \quad (4.2.13)$$

Isto parece implicar a relação de incerteza

$$\Delta \mathbf{n} \Delta \Phi \geq \frac{1}{2}. \quad (4.2.14)$$

Esta relação de incerteza não faz sentido, porque a incerteza em  $\mathbf{n}$  pode se tornar arbitrariamente pequena e que a incerteza em  $\Phi$  não pode ser maior que  $\pi$ . Na verdade, esta relação de incerteza não é necessariamente a da Equação 4.2.13, porque o

operador de fase não é Hermitiano. Outro problema é que, para um estado de número, o valor esperado do comutador deve ser zero [24], em vez de  $i$ .

Uma solução deste problema é que, embora não seja possível definir um operador de fase Hermitiano, é possível definir operadores seno e cosseno Hermitianos que satisfazem as relações de incerteza, Equações 4.2.13 e 4.2.14 [24, 25].

### 4.3 Formalismo de Susskind-Glogower

Admitindo que não é possível obter um operador de fase Hermitiano e seguindo a ideia de Louisell, que trabalhou com funções periódicas  $\cos \phi$ ,  $\sin \phi$  e  $\exp(i\phi)$  desse operador, Susskind e Glogower [26], sugeriram os operadores:

$$\mathbf{E} = (\mathbf{n} + \mathbf{1})^{-\frac{1}{2}} \mathbf{a} \quad (4.3.15)$$

$$e\mathbf{E}^\dagger = \mathbf{a}^\dagger (\mathbf{n} + \mathbf{1})^{-\frac{1}{2}} \quad (4.3.16)$$

Os operadores  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{E}^\dagger$  são análogos de  $e^{\pm i\phi}$ , ou seja ao definido na Equação (4.2.7). Sabendo que:

$$\cos \phi = \frac{1}{2} (e^{i\phi} + e^{-i\phi}) \quad (4.3.17)$$

$$e \sin \phi = \frac{1}{2i} (e^{i\phi} - e^{-i\phi}) \quad (4.3.18)$$

chegamos aos operadores  $\mathbf{C}$  e  $\mathbf{S}$  (análogos a  $\hat{\cos} \phi$  e  $\hat{\sin} \phi$ ):

$$\mathbf{C} = \frac{1}{2} (\mathbf{E} + \mathbf{E}^\dagger) \quad (4.3.19)$$

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2i} (\mathbf{E} - \mathbf{E}^\dagger), \quad (4.3.20)$$

Expandindo na base de número  $\mathbf{n}^{\frac{1}{2}}$ ,  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{a}^\dagger$ ,  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{E}^\dagger$ , temos:

$$\mathbf{n}^{\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n} |n\rangle \langle n| = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n+1} |n+1\rangle \langle n+1|, \quad (4.3.21)$$

$$\mathbf{a} = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n} |n+1\rangle \langle n+1|, \quad (4.3.22)$$

$$\mathbf{a}^\dagger = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n+1} |n+1\rangle \langle n|, \quad (4.3.23)$$

$$\mathbf{E} = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle n+1|, \quad (4.3.24)$$

e

$$\mathbf{E}^\dagger = \sum_{n=0}^{\infty} |n+1\rangle \langle n|. \quad (4.3.25)$$

Desta forma podemos obter as seguintes relações de comutação:

$$[\mathbf{C}, \mathbf{n}] = i\mathbf{S}, \quad (4.3.26)$$

$$[\mathbf{S}, \mathbf{n}] = i\mathbf{C}, \quad (4.3.27)$$

$$[\mathbf{C}, \mathbf{S}] = \frac{i}{2} |0\rangle \langle 0| \quad (4.3.28)$$

e

$$\mathbf{C}^2 + \mathbf{S}^2 = \mathbf{I} - \frac{1}{2} |0\rangle \langle 0|. \quad (4.3.29)$$

Os operadores de Susskind-Glogower satisfazem as seguintes relações de comutação:

$$[\widehat{\cos \Phi}, \mathbf{n}] = i\widehat{\sin \Phi} \quad (4.3.30)$$

e

$$[\widehat{\sin \Phi}, \mathbf{n}] = i\widehat{\cos \Phi}. \quad (4.3.31)$$

As relações de incerteza correspondentes são:

$$\Delta \mathbf{n} \Delta \widehat{\cos \Phi} \geq \frac{1}{2} \left| \langle \widehat{\sin \Phi} \rangle \right| \quad (4.3.32)$$

e

$$\Delta n \Delta \widehat{\sin \Phi} \geq \frac{1}{2} \left| \langle \widehat{\cos \Phi} \rangle \right|. \quad (4.3.33)$$

Estas relações de incerteza fazem sentido, porque no limite pequeno de número, a expectativa de valores da incerteza no lado direito também se torna pequeno, portanto, essas relações de incerteza não implicam muitos grandes valores de  $\Delta \widehat{\cos \Phi}$  ou de  $\Delta \widehat{\sin \Phi}$ .

Infelizmente, também existem problemas com estes operadores. Por exemplo, descobriu-se que para o estado de vácuo  $\langle \widehat{\cos^2 \Phi} \rangle = \frac{1}{4}$  [20]. À medida que o estado de vácuo deve ter para uma distribuição uniforme da fase, era esperado que  $\langle \widehat{\cos^2 \Phi} \rangle$  fosse igual a  $\frac{1}{2}$ . Além disso, utilizando estes operadores encontramos  $\langle \exp(ip\Phi) \rangle = 0$  para todos os inteiros  $p > 0$ . Isto implica uma distribuição uniforme da fase, que é o que seria de esperar, mas é inconsistente com o resultado obtido para  $\langle \cos^2 \Phi \rangle$ .

## 4.4 Formalismo de Pegg-Barnett

O formalismo Pegg-Barnett [16, 27, 28], é outra abordagem para encontrar um operador hermitiano de fase. A base deste formalismo é estabelecer um limite superior  $s$  sobre o número de fótons, e em seguida, tomar o limite como  $s$  tende ao infinito. Os estados de fase de referência são:

$$|\theta_m\rangle_s = (s+1)^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^s \exp(in\theta_m) |n\rangle, \quad (4.4.34)$$

onde

$$\theta_m = \theta_0 + \frac{2m\pi}{s+1}, \quad m=0,1,\dots,s, \quad (4.4.35)$$

sendo  $\theta_0$  uma constante arbitrária.

Um operador hermitiano fase é definido por;

$$\hat{\Phi} = \sum_{m=0}^s \theta_m |\theta_m\rangle_s \langle \theta_m|. \quad (4.4.36)$$

Para este operador os estados fase são  $|\theta_m\rangle_s$ , com autovalores de  $\theta_m$ . Em termos da base número, o operador é:

$$\hat{\Phi}_s = \theta_0 + \frac{s\pi}{s+1} + \frac{2\pi}{2+1} \sum_{jk}^s \frac{\exp[i(j-k)\theta_0] |j\rangle \langle k|}{\frac{\exp i(j-k)2\pi}{(s+1)} - 1}. \quad (4.4.37)$$

No formalismo Pegg-Barnett, o limite de  $s \rightarrow \infty$  é tomado após valores esperados foram determinados.

Também é possível tomar o limite de  $s \rightarrow \infty$  da Eq. (4.4.34), o que resulta em:

$$\hat{\Phi}_\infty = \theta_0 + \pi + \sum_{jk}^\infty \frac{\exp[i(j-k)\theta_0] |j\rangle \langle k|}{i(j-k)}. \quad (4.4.38)$$

Este operador também já foi considerado antes do formalismo de Pegg-Barnett [29, 30, 31]. Isso pareceria ser um operador hermitiano, que pode ser usado para descrever a fase, no entanto, há problemas com este operador. Ele leva a valores esperados diferentes do que dado pelo formalismo Pegg-Barnett (em que os valores esperados são tomados antes do limite de  $s \rightarrow \infty$ ).

O problema é que a Equação(4.4.37) converge para (4.4.38) apenas “fracamente” [32]. Os limites fracos dos operadores não preservam a álgebra do operador, por exemplo, o limite de fraco  $\hat{\Phi}_s^2$  não é  $\hat{\Phi}_\infty^2$ . Um resultado disto é que, para o estado de vácuo  $\langle \hat{\Phi}_\infty^2 \rangle = \frac{\pi^2}{6}$  [33, 34]. Para uma distribuição uniforme de fase, o resultado deve ser  $\frac{\pi^2}{3}$ , o qual é obtido a partir do limite de  $\hat{\Phi}_s^2$ .

## Capítulo 5

# Relação de incerteza de Iñigo e Géza e a aplicação aos Estados Binomiais

A proposta aqui apresentada por Iñigo e Géza [35], não prescinde da construção explícita de um operador fase. A variação na fase ( $\Delta\hat{\phi}$ ), é apresentada através da sua relação canônica com o número de fótons ( $\Delta\hat{n}$ ), através da incerteza ( $\Delta\hat{a}$ ). Quando Dirac propôs o seu operador de fase, considerou que os operadores de fase e número eram canonicamente conjugadas, desde então, uma relação de incerteza entre ambas vem sendo discutida. Vamos analisar uma alternativa sugerida por Iñigo e Géza [35], que considera a relação de incerteza dos operadores de número e aniquilação, como alternativa para a relação de incerteza número-Fase.

Na secção 5.1 apresentaremos a relação de incerteza para o operador não hermitiano  $\mathbf{a}$ , tomando como modelo o oscilador harmônico simples. Na secção 5.2 apresentamos o estado binomial e aplicamos a relação de Iñigo e Géza, com o objetivo de investigar o seu comportamento neste estado.

## 5.1 Quantização do movimento

Nesta subseção, vamos deduzir a relação de incerteza de Heisenberg, como consequência da quantização do movimento da partícula, associando-se a  $x$  e  $p$ , dois operadores não constantes e Hermitianos definidos, respectivamente, como:

$$\hat{x} = x \quad (5.1.1)$$

e

$$\hat{p} = \hbar \frac{\partial}{i\partial x}. \quad (5.1.2)$$

De modo que, atuando sobre a função de onda,  $[\hat{x}, \hat{p}] \Psi(x)$ , obtém-se:

$$[\hat{x}, \hat{p}] = \hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x} = i\hbar, \quad (5.1.3)$$

No caso do oscilador harmônico simples, o Hamiltoniano pode ser escrito em termos dos operadores de posição e momento por:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2 \hat{x}^2}{2} \quad (5.1.4)$$

ou

$$\hat{H} = \frac{\hbar\omega}{2} \left( \frac{\hat{p}^2}{m\omega\hbar} + \frac{m\omega\hat{x}^2}{2\hbar} \right). \quad (5.1.5)$$

Definindo-se os termos da soma nas Equações (5.1.1) e (5.1.2) como:

$$\hat{X} = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \hat{x} \quad (5.1.6)$$

$$\hat{P} = \frac{1}{\sqrt{m\omega\hbar}} \hat{p} \quad (5.1.7)$$

de modo que:

$$[\hat{X}, \hat{P}] = i, \quad (5.1.8)$$

podemos escrever  $\hat{H}$  como:

$$\hat{H} = \frac{\hbar\omega}{2} (\hat{X}^2 + \hat{P}^2) \quad (5.1.9)$$

ou

$$\hat{H} = \frac{\hbar\omega}{2} \left[ (\hat{X} - i\hat{P})(\hat{X} + i\hat{P}) + 1 \right]. \quad (5.1.10)$$

Definindo os operadores de aniquilação e criação, respectivamente como:

$$\mathbf{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{X} + i\hat{P}) \quad (5.1.11)$$

e

$$\mathbf{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{X} - i\hat{P}) \quad (5.1.12)$$

pode-se escrever os operadores  $\hat{x}$  e  $\hat{p}$ , respectivamente, como:

$$\hat{X} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{a} + \mathbf{a}^\dagger) \quad (5.1.13)$$

e

$$\hat{P} = \frac{1}{\sqrt{2}i} (\mathbf{a} - \mathbf{a}^\dagger). \quad (5.1.14)$$

Das Equações (5.1.11), (5.1.12), (5.1.13) e (5.1.14), temos que:

$$\langle \mathbf{a} \rangle = \frac{\langle \hat{X} \rangle + i \langle \hat{P} \rangle}{\sqrt{2}}, \quad (5.1.15)$$

$$\langle \mathbf{a}^\dagger \rangle = \frac{\langle \hat{X} \rangle - i \langle \hat{P} \rangle}{\sqrt{2}}, \quad (5.1.16)$$

$$\langle \hat{X} \rangle = \frac{\langle \mathbf{a} \rangle + \langle \mathbf{a}^\dagger \rangle}{\sqrt{2}} \quad (5.1.17)$$

e

$$\langle \hat{P} \rangle = \frac{\langle \mathbf{a} \rangle - \langle \mathbf{a}^\dagger \rangle}{\sqrt{2}i}. \quad (5.1.18)$$

Calculando o módulo quadrado das Equações (5.1.15) e (5.1.16), resulta em:

$$|\langle \mathbf{a} \rangle|^2 = \left( \frac{\langle \hat{X} \rangle + \langle i\hat{P} \rangle}{\sqrt{2}} \right) \left( \frac{\langle \hat{X} \rangle^* - i \langle \hat{P} \rangle^*}{\sqrt{2}} \right) \quad (5.1.19)$$



e

$$|\langle \mathbf{a}^\dagger \rangle|^2 = \left( \frac{\langle \hat{X} \rangle - \langle i\hat{P} \rangle}{\sqrt{2}} \right) \left( \frac{\langle \hat{X} \rangle^* + i\langle \hat{P} \rangle^*}{\sqrt{2}} \right). \quad (5.1.20)$$

Daí, temos que:

$$|\langle \mathbf{a} \rangle|^2 = |\langle \mathbf{a}^\dagger \rangle|^2. \quad (5.1.21)$$

Da mesma forma, calculando o módulo quadrado das Equações (5.1.17) e (5.1.18), temos:

$$|\langle \hat{X} \rangle|^2 = \left( \frac{\langle \mathbf{a} \rangle + \langle \mathbf{a}^\dagger \rangle}{\sqrt{2}} \right) \left( \frac{\langle \mathbf{a} \rangle^* + \langle \mathbf{a}^\dagger \rangle^*}{\sqrt{2}} \right) \quad (5.1.22)$$

$$|\langle \hat{P} \rangle|^2 = \left( \frac{\langle \mathbf{a} \rangle - \langle \mathbf{a}^\dagger \rangle}{\sqrt{2}i} \right) \left( \frac{\langle \mathbf{a} \rangle^* - \langle \mathbf{a}^\dagger \rangle^*}{\sqrt{2}(-i)} \right) \quad (5.1.23)$$

da soma das Equações (5.1.22) e (5.1.23) chega-se a seguinte equação:

$$|\langle \hat{X} \rangle|^2 + |\langle \hat{P} \rangle|^2 = |\langle \mathbf{a} \rangle|^2 + |\langle \mathbf{a}^\dagger \rangle|^2 \quad (5.1.24)$$

e da Equação (5.1.21), temos que:

$$|\langle \hat{X} \rangle|^2 + |\langle \hat{P} \rangle|^2 = 2|\langle \mathbf{a} \rangle|^2 \quad (5.1.25)$$

A variância de um operador não hermitiano  $\hat{A}$  é definida por Iñigo e Geza [35], como:

$$(\Delta \hat{A})^2 = \langle \hat{A}^\dagger \hat{A} \rangle - \langle \hat{A}^\dagger \rangle \langle \hat{A} \rangle, \quad (5.1.26)$$

logo para  $\hat{A} = \mathbf{a}$ , tem-se que:

$$(\Delta \mathbf{a})^2 = \langle \mathbf{a}^\dagger \mathbf{a} \rangle - \langle \mathbf{a}^\dagger \rangle \langle \mathbf{a} \rangle, \quad (5.1.27)$$

$$(\Delta \mathbf{a})^2 = \langle \mathbf{n} \rangle - \langle \mathbf{a}^\dagger \rangle \langle \mathbf{a} \rangle, \quad (5.1.28)$$

ou

$$(\Delta \mathbf{a})^2 = \langle \mathbf{n} \rangle - |\langle \mathbf{a} \rangle|^2. \quad (5.1.29)$$

Das Equações (5.1.27), (5.1.11) e (5.1.12) resulta na seguinte equação:

$$(\Delta \mathbf{a})^2 = \left\langle \left( \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{X} - i\hat{P}) \right) \left( \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{X} + i\hat{P}) \right) \right\rangle - \left\langle \left( \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{X} - i\hat{P}) \right) \right\rangle \left\langle \left( \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{X} + i\hat{P}) \right) \right\rangle \quad (5.1.30)$$

que pode ser dada por:

$$2(\Delta \mathbf{a})^2 + 1 = (\Delta \hat{X})^2 + (\Delta \hat{P})^2. \quad (5.1.31)$$

Das relações de incerteza de Heisenberg para dois operadores de  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$ , tem-se:

$$(\Delta \hat{A})^2 (\Delta \hat{B})^2 \geq \frac{1}{4} \left| \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle \right|^2 \quad (5.1.32)$$

e sabendo que:

$$\begin{aligned} [\mathbf{n}, \mathbf{a}] &= \mathbf{a}, \\ [\mathbf{n}, \hat{P}] &= i\hat{X} \end{aligned}$$

e

$$[\mathbf{n}, \hat{X}] = i\hat{P}, \quad (5.1.33)$$

Temos que:

$$(\Delta \mathbf{n})^2 (\Delta \mathbf{a})^2 \geq \frac{1}{4} |\langle [\mathbf{n}, \mathbf{a}] \rangle|^2 = \frac{1}{4} |\langle \mathbf{a} \rangle|^2, \quad (5.1.34)$$

$$(\Delta \mathbf{n})^2 (\Delta \hat{P})^2 \geq \frac{1}{4} \left| \langle [\mathbf{n}, \hat{P}] \rangle \right|^2 = \frac{1}{4} \left| \langle \hat{X} \rangle \right|^2 \quad (5.1.35)$$

e

$$(\Delta \mathbf{n})^2 (\Delta \hat{X})^2 \geq \frac{1}{4} \left| \langle [\mathbf{n}, \hat{X}] \rangle \right|^2 = \frac{1}{4} \left| \langle \hat{P} \rangle \right|^2. \quad (5.1.36)$$

Somando-se as duas Equações (5.1.35) e (5.1.36) resulta em:

$$(\Delta \mathbf{n})^2 \left[ (\Delta \hat{X})^2 + (\Delta \hat{P})^2 \right] \geq \frac{1}{4} \left[ \left| \langle \hat{X} \rangle \right|^2 + \left| \langle \hat{P} \rangle \right|^2 \right] \quad (5.1.37)$$

e das Equações (5.1.25) e (5.1.31):

$$(\Delta \mathbf{n})^2 \left[ (\Delta \mathbf{a})^2 + \frac{1}{2} \right] \geq \frac{1}{4} |\langle \mathbf{a} \rangle|^2. \quad (5.1.38)$$

O consolidado na relação de incerteza da Equação (5.1.38) não é uma constante: depende de  $\langle \mathbf{a} \rangle$ , que é igual a zero para uma ampla classe de estados.

Adicionando-se o termo  $\frac{[(\Delta \mathbf{a})^2 + \frac{1}{2}]}{4}$  em ambos os lados da Equação (5.1.38), chega-se a:

$$(\Delta \mathbf{n})^2 \left[ (\Delta \mathbf{a})^2 + \frac{1}{2} \right] + \frac{[(\Delta \mathbf{a})^2 + \frac{1}{2}]}{4} \geq \frac{1}{4} |\langle \mathbf{a} \rangle|^2 + \frac{[(\Delta \mathbf{a})^2 + \frac{1}{2}]}{4} \quad (5.1.39)$$

ou

$$(\Delta \mathbf{n})^2 \left[ (\Delta \mathbf{a})^2 + \frac{1}{2} \right] + \frac{1}{4} \left[ (\Delta \mathbf{a})^2 + \frac{1}{2} \right] \geq \frac{1}{4} (|\langle \mathbf{a} \rangle|^2 + (\Delta \mathbf{a})^2) + \frac{1}{8} \quad (5.1.40)$$

Usando a Equação (5.1.29) chegamos a relação de incerteza de Iñigo e Géza [35], relação em que o limite depende de  $\langle \mathbf{n} \rangle$  em vez de  $\langle \mathbf{a} \rangle$ :

$$\left( (\Delta \mathbf{n})^2 + \frac{1}{4} \right) \left( (\Delta \mathbf{a})^2 + \frac{1}{2} \right) \geq \frac{\langle n \rangle}{4} + \frac{1}{8} \quad (5.1.41)$$

O lado direito da Equação (5.1.41) é o mínimo para o estado  $|0\rangle$ , nos demais casos o lado direito é maior do que  $\frac{1}{8}$ , assim a incerteza encontra-se em alguma parte do plano  $(\Delta \mathbf{a})^2 \times (\Delta \mathbf{n})^2$  inacessível para estados quânticos [35].

Os limites relacionados a Equação (5.1.41) devem ser verificados, pois esta equação, foi construída pela soma das duas relações de incerteza das Equações (5.1.35) e (5.1.36) enquanto a nova relação da Equação (5.1.38) é válida, as relações de incerteza das Equações (5.1.35) e (5.1.36) não são válidas nos limites saturando os diferentes estados [35].

Investigando os limites da Equação (5.1.41), existem estados quânticos que saturam nos limites. Quando isso ocorre o lado esquerdo da equação, vai interpolar entre estados coerentes e os estados de número (Fock).

Na Figura (5.1) [35], foi plotado os pontos correspondentes aos valores de  $(\Delta \mathbf{a})^2$  e  $(\Delta \mathbf{n})^2$ , que satura a Equação (5.1.41) para  $\langle \mathbf{n} \rangle = 25$ , todos os pontos abaixo dessa linha violam a relação desta equação.

Para estados de número temos:  $(\Delta \mathbf{a})_{\text{Fock}}^2 = \langle \mathbf{n} \rangle$  e  $(\Delta \mathbf{n})_{\text{Fock}}^2 = \mathbf{0}$ , assim os estados de número saturam a Equação (5.1.41). Para  $(\Delta \mathbf{a})_{\text{coerente}}^2 = \mathbf{0}$ , a variância do número de partículas satura a Equação (5.1.41) é  $(\Delta \mathbf{n})_{\text{coerente}}^2 = \frac{1}{2} \langle \mathbf{n} \rangle$ . Isso evidencia que o limite inferior da Equação (5.1.41) não pode ser o ideal porque para  $(\Delta \mathbf{a})^2 = \mathbf{0}$  existe uma significativa classe de estados que não possuem a variância do número de partículas menor que  $\langle \mathbf{n} \rangle$  [35]. Vale ressaltar que uma importante classe de estados para os quais  $\Delta \mathbf{n} < \langle \mathbf{n} \rangle$  são conhecidos por possuírem estatística sub-poissoniana (Fator de fano  $F < 1$ ).

Estados minimizando,  $(\Delta \mathbf{n})^2$  para  $0 < (\Delta \mathbf{a})^2 < \langle \mathbf{n} \rangle$ , em certo sentido, interpolam entre estados coerentes e de número (Fock) [35].

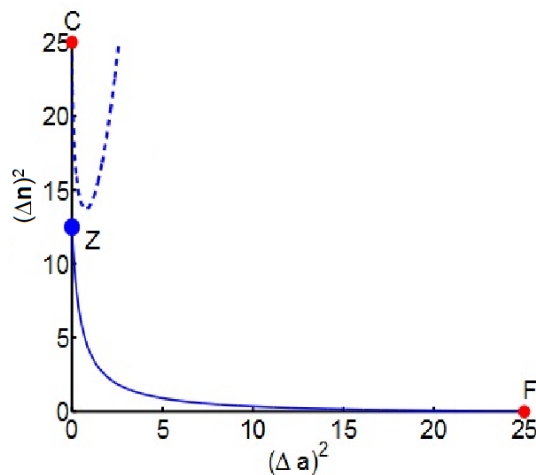


Figura 5.1: Gráfico dos pontos correspondentes aos valores de  $(\Delta \mathbf{a})^2$  e  $(\Delta \mathbf{n})^2$

Na Figura 5.1: temos um teste numérico da desigualdade da Equação (5.1.41), sendo que F refere-se ao estado de número  $|\mathbf{n} = 25\rangle$ , C refere-se aos estados coerente  $|\alpha = 5\rangle$ , Z refere-se ao ponto que satura a desigualdade (5.1.41) para  $(\Delta \mathbf{a})^2 = \mathbf{0}$ . A linha sólida é limite da região definida pela equação (5.1.41), para  $\langle \mathbf{n} \rangle = 25$ . Todos

os pontos abaixo dessa linha correspondem a um valor físico  $(\Delta \mathbf{a})^2 - (\Delta \mathbf{n})^2$ . A Linha tracejada são os pontos correspondentes para estados coerentes espremido.

Saturando os estados eles interpolam entre estados de número  $|n\rangle$  e estados coerentes  $|\alpha\rangle$ , então vamos verificar os limites desta relação de incerteza para os Estados Binomiais, já que estes nos diferentes limites se reduzem aos estados de número  $|n\rangle$  e estados coerentes  $|\alpha\rangle$  [35].

Finalizando esta seção, em mecânica quântica os operadores escada  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{a}^\dagger$  são uma combinação linear dos operadores de posição e momento linear, cuja álgebra é análoga a quantização do campo magnético para um único modo. Em teoria quântica de campos, não existe uma representação para os operadores de criação e aniquilação. No caso do campo eletromagnético livre, a amplitude de oscilação,  $A$ , passa a ser um operador de aniquilação.

## 5.2 Estados binomiais

O Estado Binomial  $|\eta, M\rangle$ , é uma combinação linear de  $n$  estados  $|0\rangle, |1\rangle, \dots, |M\rangle$ , com coeficientes escolhidos de tal modo que a contagem de probabilidade é binomial com média  $\eta M$ . É definido como uma superposição com  $M$ -dimensional no espaço Hibert [36], ou seja:

$$|\eta, M\rangle = \sum_{n=0}^M \beta_n^M(\eta) |n\rangle, \quad (5.2.42)$$

sendo  $\beta_n^M(\eta)$  dado por:

$$\beta_n^M(\eta) = \left[ \binom{M}{n} \eta^n (1-\eta)^{M-n} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (5.2.43)$$

No limite,

$$|1, M\rangle = |M\rangle, \quad (5.2.44)$$

tem-se o estado de número  $|M\rangle$ , enquanto que,

$$|0, \infty\rangle = |\alpha\rangle \quad (5.2.45)$$

com

$$\eta M \rightarrow |\alpha|^2. \quad (5.2.46)$$

tem-se o estado coerente  $|\alpha\rangle$ . Portanto  $|M\rangle$  e  $|\alpha\rangle$  são os limites dos estados binomiais, onde  $\mathbf{n}|M\rangle = M|M\rangle$  e  $\mathbf{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$ ;  $\langle\alpha|\mathbf{n}|\alpha\rangle = |\alpha|^2$ .

A probabilidade  $p_n$  de encontrar  $n$  fótons no estado Binomial é dada por [36]:

$$p_n = |\langle n|\eta, M\rangle|^2 = |\beta_n^M(\eta)|^2 = \binom{M}{n} \eta^n (1-\eta)^{M-n}, \quad (5.2.47)$$

e são normalizados como:

$$\langle\eta, M|\eta, M\rangle = \sum_{n=0}^M |\beta_n^M(\eta)|^2 = \sum_{n=0}^M \binom{M}{n} \eta^n (1-\eta)^{M-n} = 1 \quad (5.2.48)$$

embora não sendo um conjunto ortogonal, ou seja,  $\langle\eta', M|\eta M\rangle \neq 0$ ,  $\eta' \neq \eta$ .

O número médio de fótons neste estado é dado por [36];

$$\begin{aligned} \langle\mathbf{n}\rangle_{\eta, M} &= \langle\eta, M|\mathbf{n}|\eta, M\rangle = \sum_{n=0}^M n |\beta_n^M|^2 \\ &= \sum_{n=0}^M n \frac{M!}{n!(M-n)!} \left(\frac{\eta}{1-\eta}\right)^n (1-\eta)^M \\ &= \sum_{n=0}^M \frac{M(M-1)!}{(n-1)!(M-n)!} \eta(\eta)^{n-1} (1-\eta)^{M-n} \\ &= \eta M \sum_{n=0}^M \binom{M-1}{n-1} \eta^{n-1} (1-\eta)^{M-n} \\ \langle\mathbf{n}\rangle_{\eta, M} &= \eta M. \end{aligned} \quad (5.2.49)$$

Definindo-se  $\sigma = \frac{\eta}{1-\eta}$  podemos escrever [37] que:

$$\langle\mathbf{n}\rangle_{\eta, M} = \frac{M\sigma}{1+\sigma} = \eta M \quad (5.2.50)$$

e para  $\langle \mathbf{n}^2 \rangle_{\eta, M}$ , temos [37]:

$$\langle \mathbf{n}^2 \rangle_{\eta, M} = \frac{M\sigma(M\sigma + 1)}{(1 + \sigma)^2} = (\eta M)^2 + \eta M(1 - \eta), \quad (5.2.51)$$

então:

$$(\Delta \mathbf{n})_{\eta, M}^2 \equiv \langle \Delta \mathbf{n}^2 \rangle_{\eta, M} = \langle \mathbf{n}^2 \rangle_{\eta, M} - \langle \mathbf{n} \rangle_{\eta, M}^2 = \frac{M\sigma}{(1 + \sigma)^2} \quad (5.2.52)$$

ou

$$(\Delta \mathbf{n})_{\eta, M}^2 = \eta M(1 - \eta). \quad (5.2.53)$$

Para o operador de aniquilação  $\mathbf{a}$  tem-se que [37] :

$$\mathbf{a} |\eta, M\rangle = \sum_{n=0}^M \beta_n^M n^{\frac{1}{2}} |n-1\rangle \quad (5.2.54)$$

Note a seguinte relação [37]:

$$\begin{aligned} n^{\frac{1}{2}} \beta_n^M &= n^{\frac{1}{2}} \left[ \binom{M}{\eta} \eta^n (1 - \eta)^{M-n} \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \left[ n \frac{M!}{n!(M-n)!} \eta^n (1 - \eta)^{M-n} \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \left[ \frac{M(M-1)!}{(n-1)!(M-n)!} \eta^{n-1} (1 - \eta)^{M-n} \right]^{\frac{1}{2}} \\ & \quad n^{\frac{1}{2}} \beta_n^M = (\eta M)^{\frac{1}{2}} \beta_{n-1}^{M-1} \end{aligned} \quad (5.2.55)$$

em que podemos reescrever a Equação (5.2.54), como:

$$\mathbf{a} |\eta, M\rangle = (\eta M)^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^M \beta_{n-1}^{M-1} |n-1\rangle. \quad (5.2.56)$$

O somatório da Equação (5.2.56) na verdade começa com  $n = 1$ , uma vez que para  $n = 0$  não existe. Alterando o índice da soma para  $l = n - 1$ , nos leva a [37]:

$$\mathbf{a} |\eta, M\rangle = (\eta M)^{\frac{1}{2}} \sum_{l=0}^M \beta_l^{M-1} |l\rangle \quad (5.2.57)$$

$$= (\eta M)^{\frac{1}{2}} |\eta, M-1\rangle, \quad (5.2.58)$$

portanto,  $\mathbf{a}$  atua como uma espécie de operador de redução do estado  $|\eta, M\rangle$ , e atuando o operador  $\mathbf{a}$   $n$  vezes, permite-nos tirar as seguintes expressões, de modo que:

(a) para  $n \leq M$ , temos [37]:

$$\mathbf{a}^n |\eta, M\rangle = \left[ \frac{\eta^n M!}{(M-n)!} \right]^{\frac{1}{2}} |\eta, M-n\rangle, \quad (5.2.59)$$

(b) e para  $n > M$

$$\mathbf{a}^n |\eta, M\rangle = 0. \quad (5.2.60)$$

Para  $\mathbf{a}^\dagger$  no entanto, é mais complicado, pois:

$$\mathbf{a}^\dagger |\eta, M\rangle = [\eta(M+1)]^{-\frac{1}{2}} \mathbf{n} |\eta, M+1\rangle, \quad (5.2.61)$$

não que  $\mathbf{a}^\dagger$  seja um operador para elevar  $|\eta, M\rangle$ , atuando  $\mathbf{a}^\dagger$  “ $n$ ” vezes, chegamos a [37]:

$$\mathbf{a}^{\dagger n} |\eta, M\rangle = \left[ \frac{M!}{\eta^n (M+n)!} \right]^{\frac{1}{2}} \mathbf{n}(\mathbf{n}-1) \cdots (\mathbf{n}-n+1) |\eta, M+n\rangle, \quad (5.2.62)$$

Os valores médios são obtidos usando as equações (5.2.59) e (5.2.61) [37], ou seja:

$$\langle \eta, M | \mathbf{a}^n | \eta, M \rangle = \langle \mathbf{a}^n \rangle_{\eta, M} = \left[ \frac{\eta^n M!}{(M-n)!} \right]^{\frac{1}{2}} \langle \eta, M | \eta, M-n \rangle, \quad (5.2.63)$$

cujo o complexo conjugado da Equação (5.2.63) é [37]:

$$\langle \eta, M | \mathbf{a}^{\dagger n} | \eta, M \rangle = \langle \mathbf{a}^{\dagger n} \rangle_{\eta, M} = \left[ \frac{\eta^n M!}{(M-n)!} \right]^{\frac{1}{2}} \langle \eta, M-n | \eta, M \rangle, \quad (5.2.64)$$

Já que todos valores de  $\beta_n^M$  são reais, temos que [37]:

$$\langle \eta, M | \eta, M-n \rangle = \langle \eta, M-n | \eta, M \rangle. \quad (5.2.65)$$

Para  $n=1$ , temos:

$$\langle \eta, M | \mathbf{a} | \eta, M \rangle = [\eta M]^{\frac{1}{2}} \langle \eta, M | \eta, M-1 \rangle \quad (5.2.66)$$



e

$$\langle \eta, M | \mathbf{a}^\dagger | \eta, M \rangle = [\eta M]^{\frac{1}{2}} \langle \eta, M - 1 | \eta, M \rangle. \quad (5.2.67)$$

A Equação 5.1.28 nos fornece:

$$(\Delta \mathbf{a})_{\eta, M}^2 \equiv \langle \Delta \mathbf{a} \rangle_{\eta, M}^2 = \langle \mathbf{n} \rangle_{\eta, M} - \langle \mathbf{a} \rangle_{\eta, M} \langle \mathbf{a}^\dagger \rangle_{\eta, M}, \quad (5.2.68)$$

E das Equações (5.2.49), (5.2.66) e (5.2.67), temos que:

$$(\Delta \mathbf{a})_{\eta, M}^2 = \eta M - [\eta M]^{\frac{1}{2}} \langle \eta, M | \eta, M - 1 \rangle [\eta M]^{\frac{1}{2}} \langle \eta, M - 1 | \eta, M \rangle \quad (5.2.69)$$

e da equação (5.2.65)

$$(\Delta \mathbf{a})_{\eta, M}^2 = \eta M - \eta M \langle \eta, M | \eta, M - 1 \rangle^2. \quad (5.2.70)$$

Aplicando na relação de incerteza da Equação (5.1.41), assim:

$$\left( (\Delta \mathbf{n})^2 + \frac{1}{4} \right) \left( (\Delta \mathbf{a})^2 + \frac{1}{2} \right) \geq \frac{\langle \mathbf{n} \rangle}{4} + \frac{1}{8} \quad (5.2.71)$$

ou

$$\left( \eta M (1 - \eta) + \frac{1}{4} \right) \left( \eta M - \eta M \langle \eta, M | \eta, M - 1 \rangle^2 + \frac{1}{2} \right) \geq \frac{\eta M}{4} + \frac{1}{8} \quad (5.2.72)$$

Com as Equações (5.2.44), (5.2.45) e (5.2.46), podemos analisar os limites para a relação de incerteza da Equação (5.2.72), logo para  $\eta = 1$ , temos que  $|1, M\rangle = |M\rangle$ , então:

$$\frac{M}{4} + \frac{1}{8} \geq \frac{M}{4} + \frac{1}{8}. \quad (5.2.73)$$

Enquanto para,  $\eta = 0$  e  $M \rightarrow \infty$ , temos que  $|0, \infty\rangle = |\alpha\rangle$ , com  $\eta M \rightarrow |\alpha|^2$ , daí

$$\frac{|\alpha|^2}{2} + \frac{1}{8} \geq \frac{|\alpha|^2}{4} + \frac{1}{8}, \quad (5.2.74)$$

o que torna a relação de incerteza Equação (5.2.72) consistente.

Da Equação (5.2.53) , e da Equação (5.2.70) , obtem-se uma relação paramétrica que relacionamos  $(\Delta \mathbf{a})^2$  e  $(\Delta \mathbf{n})^2$ , para os estados binomiais, ou seja:

Sabendo que o valor de  $\eta$  varia de 0 a 1, plotaremos o gráfico parametrizado de  $(\Delta \mathbf{a})^2 \times (\Delta \mathbf{n})^2$  para  $\eta$  e  $M$  fixados em 5, 10 e 25:

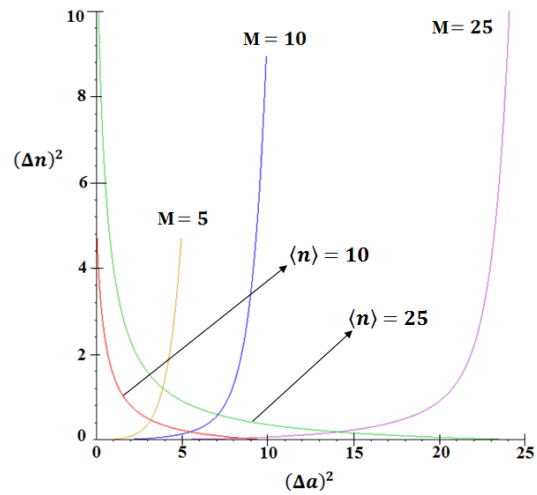


Figura 5.2: Gráfico para  $\eta$  variando e  $M$  fixo

# Capítulo 6

## Conclusão

Aplicamos a relação de incerteza de Iñigo e Geza, para o estado binomial. Encontramos estados binomiais que atendem a relação de saturação apresentada pelos autores, que conjecturamos atender ao critério dos chamados “estados inteligentes de número-fase”. Esses estados apresentam o compromisso “otimizado” com relação as variâncias no número e na fase  $(\Delta\hat{a}) \cdot (\Delta\hat{n}) = \frac{1}{2} \left| \left\langle \left[ \hat{n}, \hat{\Phi} \right] \right\rangle \right|$ . No entanto, segundo esse critério, não é necessário se ter um operador de fase bem definido.

Os nossos resultados apresentados nas simulações gráficas, através das curvas paramétricas  $(\Delta\hat{n})_{(\eta, M)}$  x  $(\Delta\hat{a})_{(\eta, M)}$  indicam que os pontos de intersecção são os estados inteligentes de número-fase. Vale salientar que os estados de número  $|M\rangle$  são obtidos do estado binomial quando  $\eta \rightarrow 1$ .

Assim sendo uma investigação futura de interesse, seria estender o limite inferior dado pela relação  $(\Delta\hat{n})$  e  $(\Delta\hat{a})$  capaz de comportar àqueles estados que não são incluídos.

Uma outra extensão possível da linha adotada nesse trabalho seria investigar a utilização dos operadores de Susskind and Glogower em substituição a  $(\Delta\hat{a})$  na expressão de Iñigo-Geza, obtendo uma relação da forma  $(\Delta\hat{n})$  e  $(\Delta\hat{\phi})$ .

# Bibliografia

- [1] Lima, A. F., Baseia B. e Marques G. C., On a new intermediate state of the quantized radiation field, *Journal of Modern Optics*, vol. 43, N 4, 729-734 (1996).
- [2] Ronan, Colin A., *História Ilustrada da Ciência*, vol. 3: da Renascença à revolução científica; Tradução, Jorge Enéas Fortes - Rio de Janeiro - Editora Jorge Zahar, (2001).
- [3] Rodrigues, R. de L. - *Mecânica Quântica na Descrição de Schrödinger* - *Rev. Bras. de Ensino de Física*, vol.19,n.1,1997.
- [4] Munhoz, P. P. - *Dissertação - Dinâmica do Modelo de Jaynes-Cummings Com Meio Kerr e Diferentes Dessintonias*, Instituto de Física “Gleb Wataghin” - IFGW - Campinas/SP, (2002).
- [5] Courteille, Ph. W.- *Mecânica Quântica Aplicada.*, disponível em [http://www.ifsc.usp.br/~strontium/Teaching/Material 2011-1 %20SFI5774%20 Mecanicaquantica/ QuanticaAplicadaScript.pdf](http://www.ifsc.usp.br/~strontium/Teaching/Material%202011-1%20SFI5774%20Mecanicaquantica/QuanticaAplicadaScript.pdf) - USP - São Carlos - (2011).
- [6] Cohen-Tannoudji, C., Diu, B. and Laloe, F., *Quantum Mechanics*, vol. I, Editora John Wiley and Sons, New York, 1977.
- [7] Byron, F. N. e Fuller, R. W., *Mathematics of Classical and Quantum Physics*, Dover (1970).
- [8] Atkins, P. W. and Friedman, R. S. (1997). *Molecular Quantum Mechanics*. Oxford University. 3rd ed. - Oxford ; Oxford University Press, New York, (1997).

- [9] Sakurai, J., Modern "Quantum" Mechanics, San Fu Tuan Edition, (1985).
- [10] Junior, Osvaldo Pessoa, O Problema da Medição em Mecânica Quântica: Um exame atualizado, UNICAMP, Publicado em Cadernos de História e Filosofia da Ciência: série 3 - 177 a 217, Campinas/SP, (1992).
- [11] Arfken, G. Mathematical Methods for Physicists. 3.ed. San Diego, CA: Academic, (1985).
- [12] Filho, Waldemar Wolney - Mecânica Quântica - Goiânia, Editora da UFG, (2002).
- [13] Caves, C. M., "Quantum-mechanical noise in an interferometer" Phys. Rev. D 23, 1693(1981).
- [14] Berry, Dominic William - Thesis Adaptive Phase Measurements, University of Queensland - (2008).
- [15] Romão, J. C. - Sobre Fases em Mecânica Quântica - Departamento de Física and CFTP, Instituto Superior Técnico - Lisboa, Portugal, disponível em <https://dspace.ist.utl.pt/bitstream/2295/149392/1/BerryPhases.pdf>.
- [16] Pegg, D.T. e Barnett, S. M. - Unitary Phase Operator in Quantum Mechanics - Europhysics Letters, Vol. 6, N (6) pp. 483/487 - (1988).
- [17] Philipp, Thun-Hohenstein - Quantum Phase and Uncertainty, Diplomarbeit Universität Wien. Fakultät für Physik, disponível em <http://othes.univie.ac.at/8540/> - (2010).
- [18] Bertlmann, Reinhold - Quantum Phase and Uncertainty - im Rahmen des Seminars Quanten physik I, Universität Wien - 2011.
- [19] Judge, D. e Lewis, J. T. Phys. Lett. 5, 190 (1963)
- [20] Carruthers P. e Nieto, M. M., "Phase angle variables in quantum mechanics" Rev. Mod. Phys 40, 441 (1968).

- [21] Baseia, B. - O Recalcitrante Operador de Fase, Rev. Bras. de Ensino de Física, Vol. 19, N 01 - (1997).
- [22] Gerry, C. C. e Knight P. L., Introductory Quantum Optics, Cambridge University, (2005).
- [23] Dirac, P. A. M. , "The quantum theory of the emission and absorption of radiation" Proc. R. Soc. London Ser. A 114, 243(1927).
- [24] Louisell, W. H., "Amplitude and phase uncertainty relations" Physcs Lett. Vol. 7, pag. 60 (1963).
- [25] Susskind L. e Glogower J., "Quantum mechanical phase and time operator" Physics 1, pp 49/61, EPL (Europhysics Letters V 6, NR 6) (1964).
- [26] Nieto M. M., "Quantum phase and quantum phase operators: Some physics and some history" Physics Scripta T48, Vol. 5 (1993).
- [27] Barnett S. M. e Pegg, D. T. "On the Hermitian optical phase operator" J. Mod. Opt. 36,7 (1989).
- [28] Pegg D. T. and Barnett S. M., "Phase properties of the quantized single-mode electromagnetic field" Phys. Rev. A 39, 1665(1989).
- [29] Garrison, J. C., e Wong, J., "Canonically conjugate pairs, uncertainty relations, and phase operators" J. Math. Phys. 11, 2242(1970).
- [30] Popov, V. N. e Yarunin, V. S., "On the problem of phase operator of linear harmonic oscillator" Vest. Leningrad. Univ. Ser. Fiz., No. 22, 7(1973).
- [31] Popov, V. N., e Yarunin, V. S., "Quantum and quasi-classical states of the photon phase operator" J. Mod. Opt. 39, 1525(1992).
- [32] Vaccaro, J. A. e Pegg, D. T., "Consistency of quantum descriptions of phase" Phys. Scr. T48, 22(1993).

- [33] Barnett, S. M. e Pegg, D. T., "Limiting procedures for the optical phase operator" *J. Mod. Opt.* 39, 2121(1992).
- [34] Gantsog, T., Miranowicz, A. e Tanas, R., "Phase properties of real field states: The Garrison-Wong versus Pegg-Barnett predictions" *Phys. Rev. A* 46, 2870(1992).
- [35] Urizar-Lanz, Iñigo e Tóth, Géza, Number operator-annihilation operator uncertainty as an alternative of the number-phase uncertainty relation, *Phys. Rev. A* 81, 052108, (2010).
- [36] B. Baseia, A. F. de Lima e A. J. da Silva, "Intermediate Number-Squeezed State of the Quantized Radiation Field", *Modern Physics Letters B*, Vol. 9, N 25, 1673/1683, (1995).
- [37] Stoler, D., Saleh, B. E. A. e Teich, M. C., "Binomial states of the quantized radiation field", *Optica ACTA*, Vol. 32 N 3, 345/355, (1985).